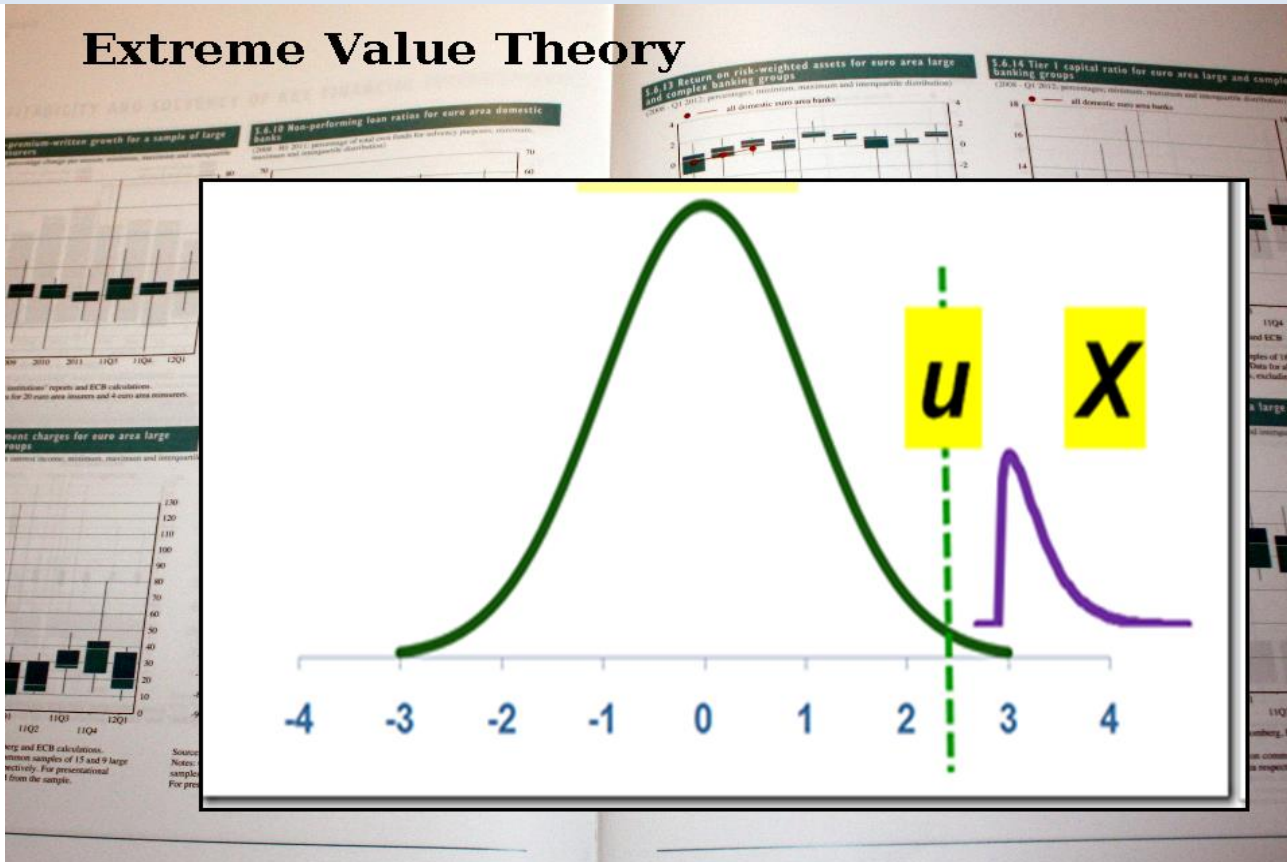


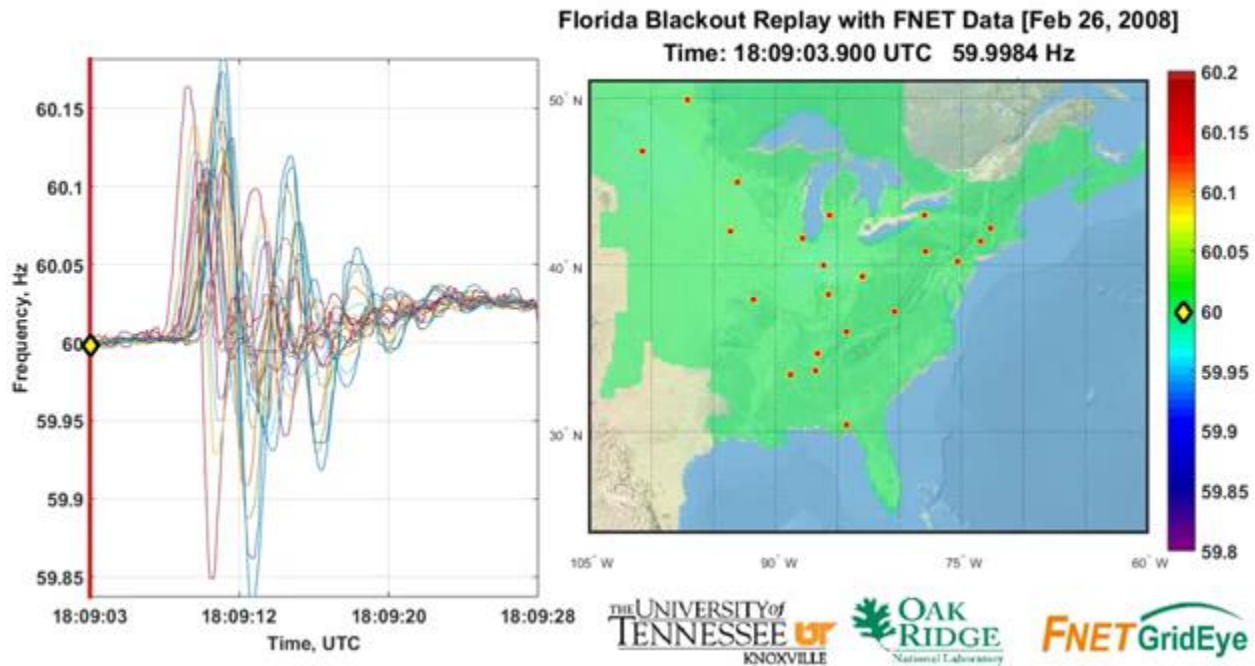
Application of EVT in Electricity & other Energy Markets.

- Dr George Papaioannou
- Director Research, Technology & Development Dpt., ADMIE
- 14-20 Ιουλίου, 2019, ΕΜΠ

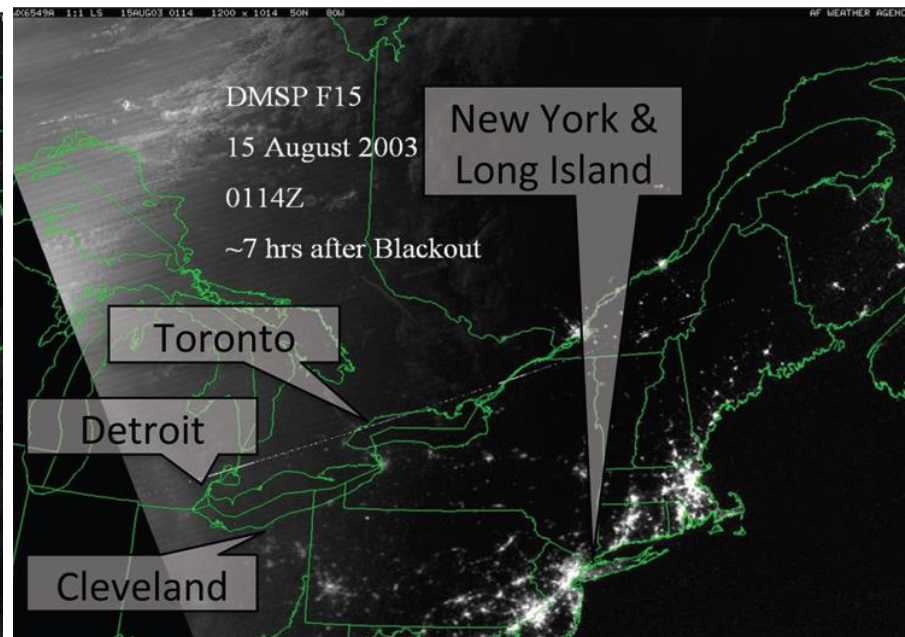
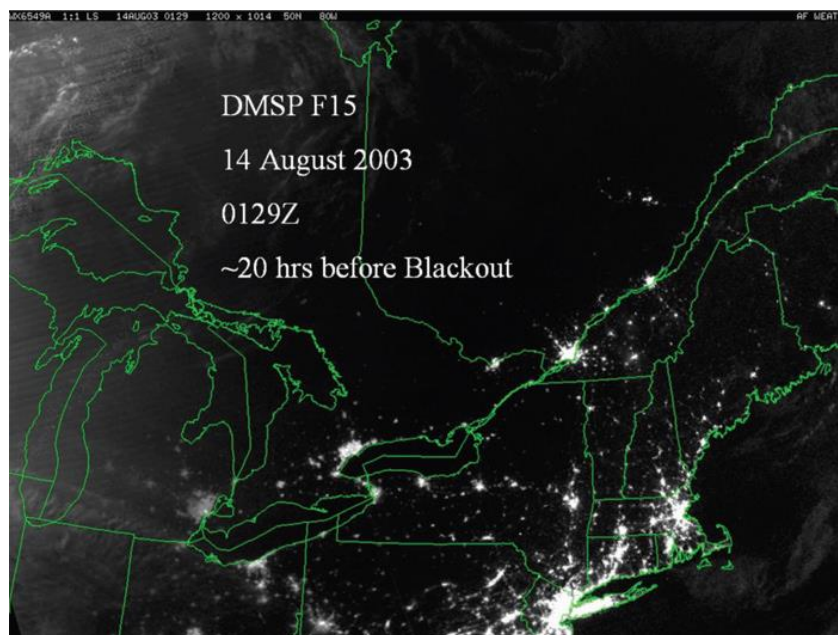
Extreme Value Theory



Blackout στη Φλοριδα 26 Φεβρ. 2018 : Ένα Ακραίο γεγονός



Blackout στη Νέα Υόρκη και Λονγκ Αϊλαντ : Αυγουστος 2003 : Ένα Ακραίο γεγονός



Νυχτερινές φωτογ. Δορυφόρου **Πρίν** και **Μετά** το Blackout , **Αυγουστος 14, 2003**.
Οι πόλεις που έχασαν την πρόσβασή τους σε ΗΕ , αναφέρονται δεξιά. 50 εκατ.
Πολίτες δεν είχαν ρεύμα .

Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization

Ian Dobson^{a)}

Department of Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin 53706

Benjamin A. Carreras

BACV Solutions Inc., Oak Ridge, Tennessee 37830

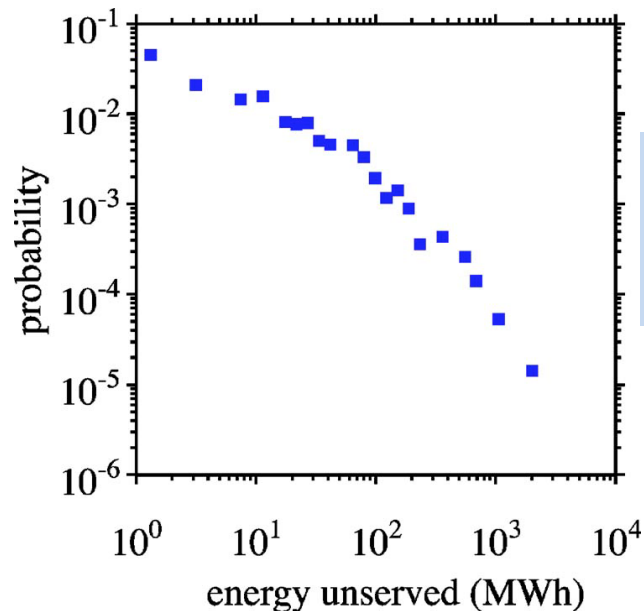
Vickie E. Lynch

Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee 37831

David E. Newman

Department of Physics, University of Alaska, Fairbanks, Alaska 99775

(Received 2 January 2007; accepted 13 April 2007; published online 28 June 2007)



Εξάρτηση Νόμου Δύναμης (Power Law)
Της μη-εξυπηρετούμενης Ηλεκτρ. Ενέργειας
(Carreras B.A, et al., 2004, 2001, Weron et al., 2005)

Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization

Η ομοιότητα της μορφής Power Law της συνάρτ. Κατανομής Πιθανοτ.(pdf) σε διαφορετικά Συστήματα Μεταφοράς ΗΕ, υποδεικνύει ότι ίσως υπάρχει κάποια universality. Η περιοχή του νόμου δύναμης περιορίζεται στην πράξη από ένα πεπερασμένο cut-off, που αντιστοιχεί στο μέγιστο δυνατό Blackout.

Complex systems analysis of blackouts

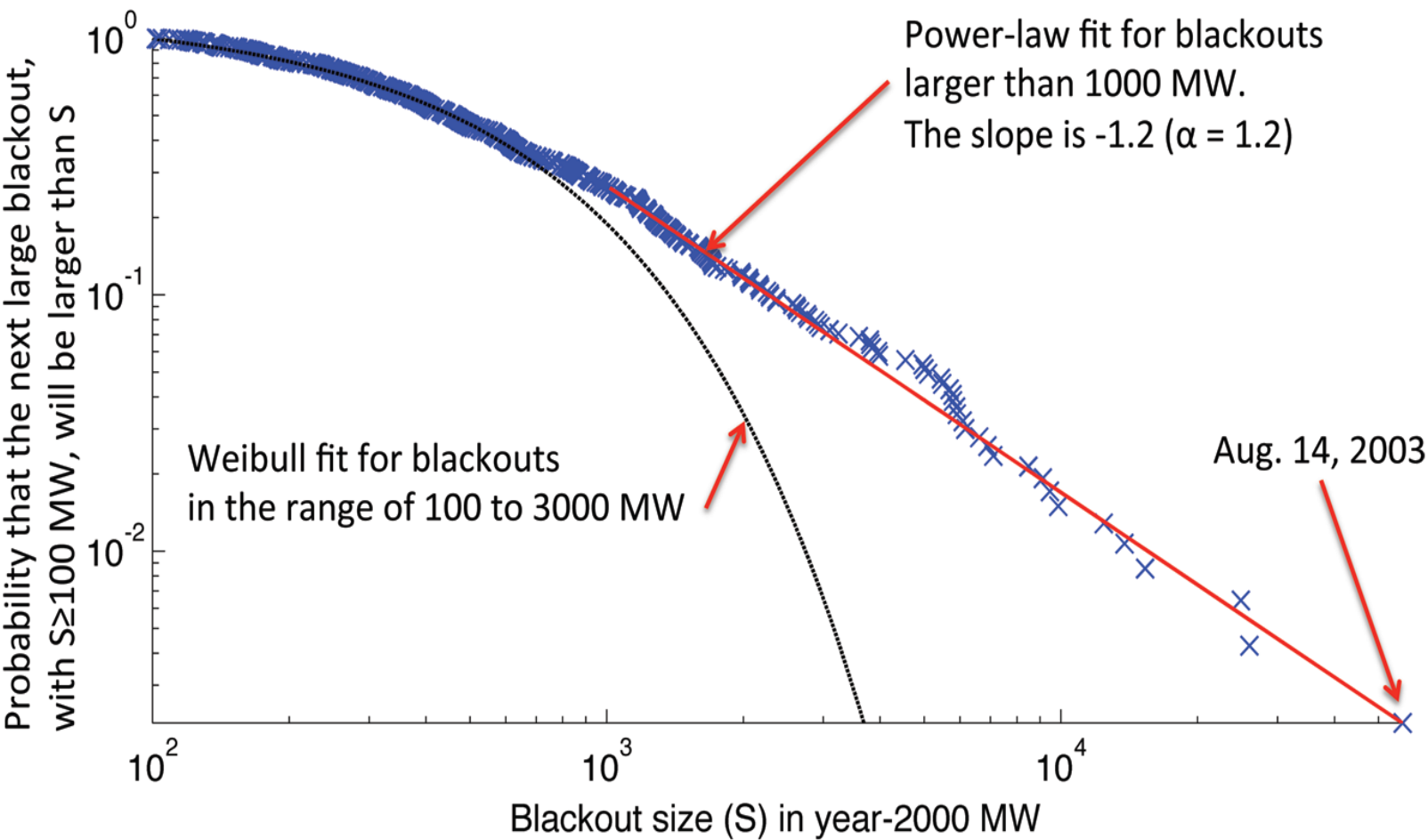
Chaos 17, 026103 (2007)

TABLE I. Observed and simulated power law exponents in the noncumulative pdf of blackout size. The power law exponent is often calculated by subtracting one from an estimate of the slope of a log-log plot of a complementary cumulative probability distribution.

Source	Exponent	Quantity
North America data (Ref. 6)	-1.3 to -2.0	Various
North America data (Refs. 19 and 20)	-2.0	Power
Sweden data (Ref. 21)	-1.6	Energy
Norway data (Ref. 22)	-1.7	Power
New Zealand data (Ref. 23)	-1.6	Energy
China data (Ref. 24)	-1.8	Energy
	-1.9	Power
OPA model on tree-like 382-node (Ref. 8)	-1.6	Power
Hidden failure model on WSCC 179-node (Ref. 9)	-1.6	Power
Manchester model on 1000-node (Ref. 10)	-1.5	Energy
CASCADE model (Ref. 11)	-1.4	No. of failures
Branching process model (Ref. 12)	-1.5	No. of failures

Blackout στη Νέα Υόρκη και Λονγκ Αϊλαντ : Αυγούστος 2003 : Ένα Ακραίο γεγονός

Η πιθανότητα ένα μεγάλο Blackout να διακόψει την εξυπηρέτηση σε ΗΕ κατά S η περισσότερα MW . Οι αριθμοί είναι κλιμακούμενοι για να προσαρμοσθούν στην αύξηση του πληθυσμού και της κατανάλωση (ζήτησης ΗΕ). (P. Hines et al., 2009)



Μετεωρολογικά Ακραία Φαινόμενα

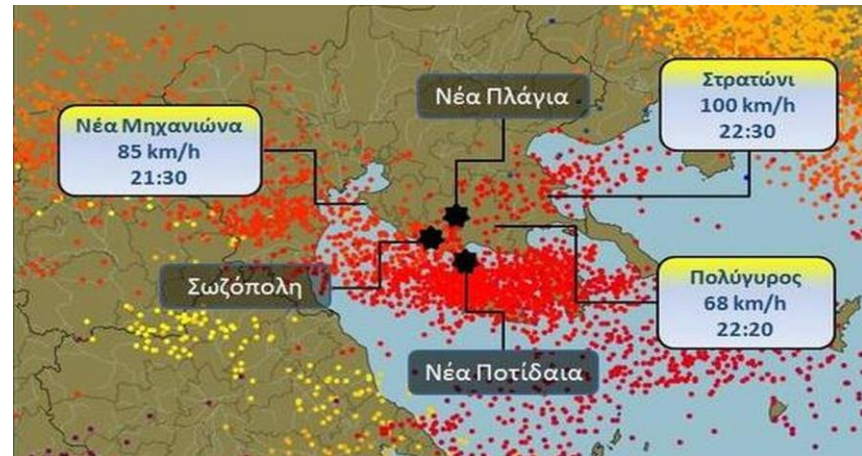
1983: Όταν η καταστροφική καταιγίδα «διέλυσε» την Χαλκιδική

Από τις πολύ υψηλές θερμοκρασίες έως τις χαλαζοπτώσεις και από τις πολύ χαμηλές θερμοκρασίες έως τα καλοκαιρινά μπουρίνια, όπως εκείνο που είχε πλήξει πριν από 36 χρόνια τον Θερμαϊκό Κόλπο, η φύση έχει δείξει αρκετές φορές το αδάμαστο πρόσωπό της



1983: Όταν η καταστροφική καταιγίδα «διέλυσε» την Χαλκιδική

2019 : Καταιγίδα στη Χαλκιδική Ιούλιος 2019



Χαλκιδική, Ιούλιος 2019



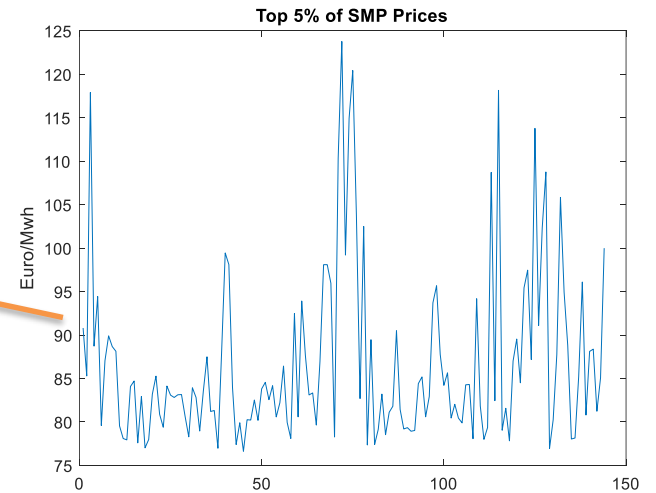
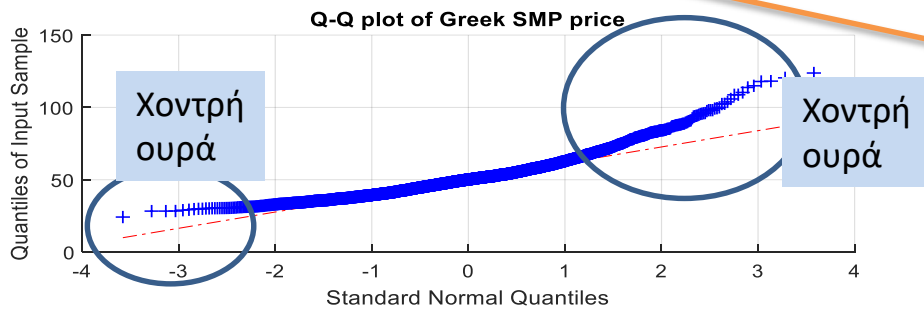
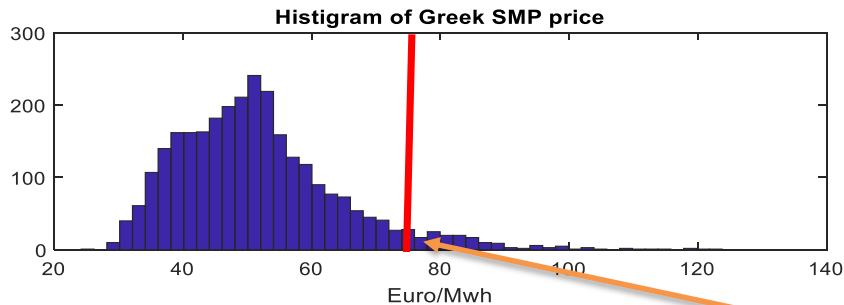
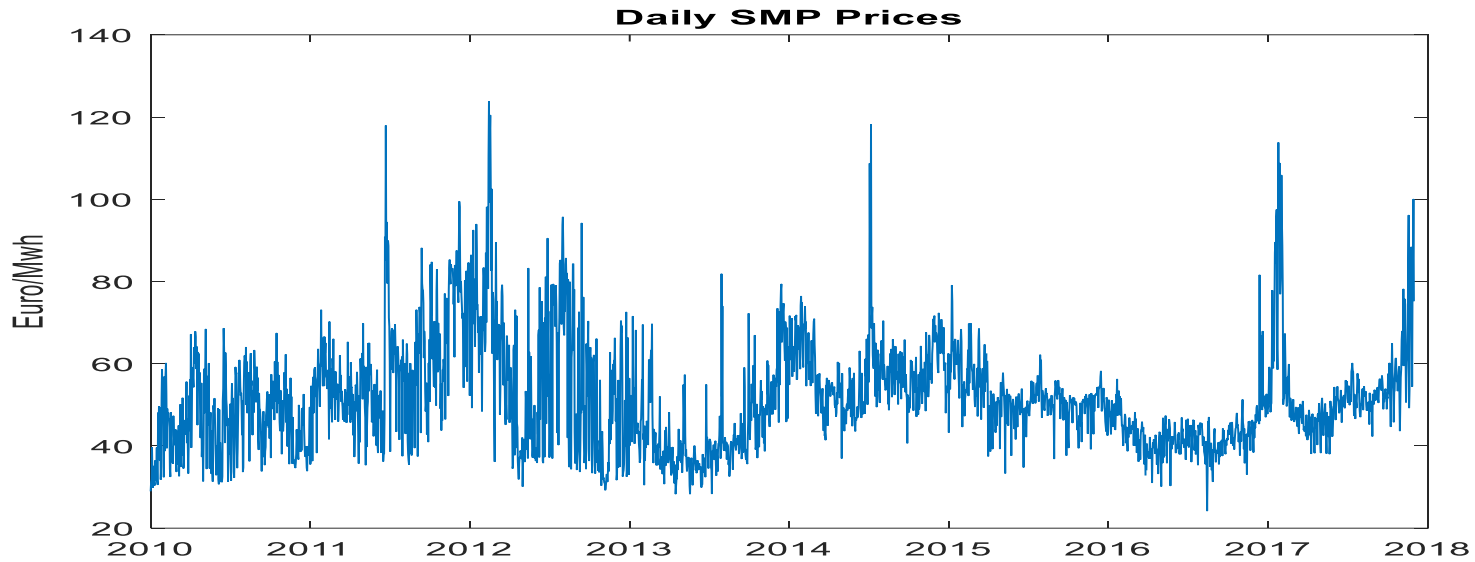
Χαλκιδική, Ιούλιος 2019

Μετεωρολογικά Ακραία Φαινόμενα

2019 : Καταιγίδα στη Χαλκιδική Ιούλιος 2019



Ακραίες Τιμές στη Ελληνική αγορά ηλεκτρισμού



Ακραίες Τιμές Ηλεκτρικής Ενέργειας (χοντρικής) στη Δανία

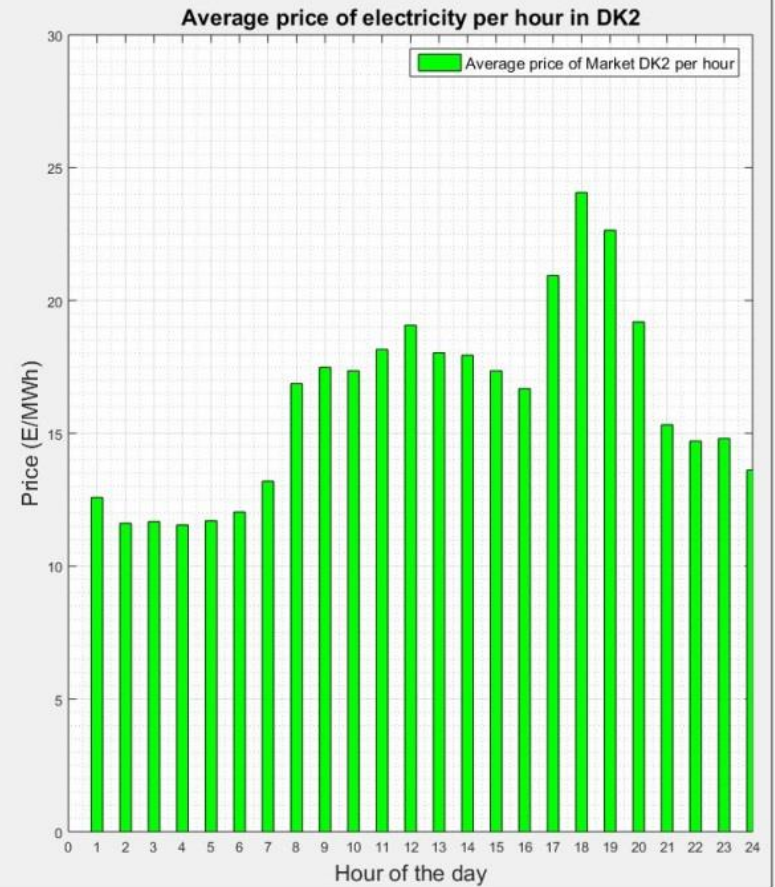
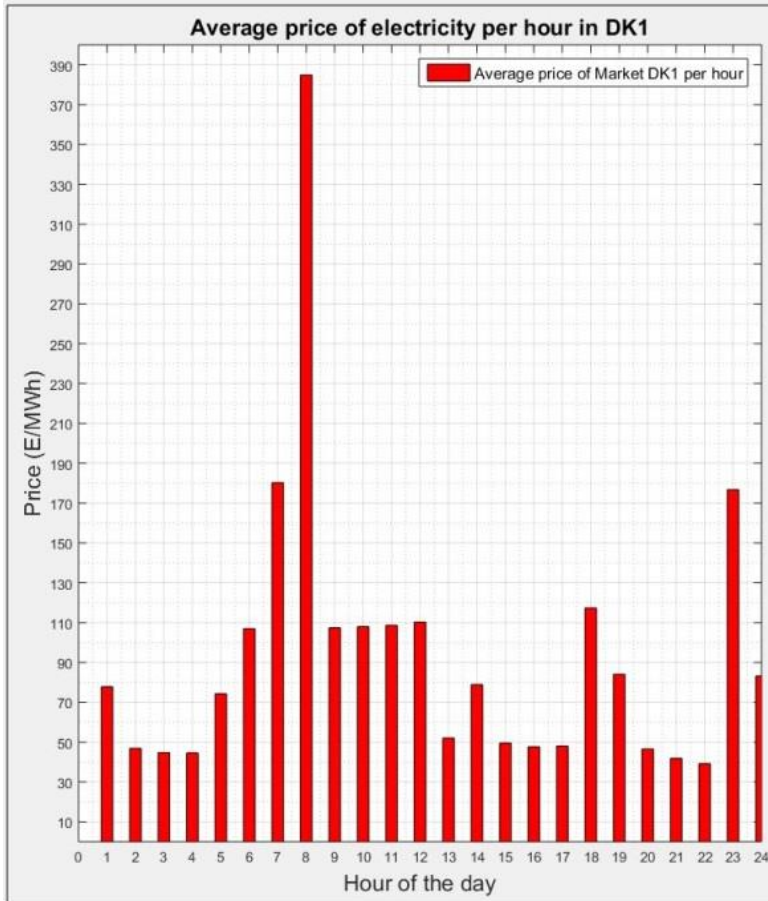
Στο σύστημα της Δανίας, υπάρχουν δύο περιοχές της αγοράς, γνωστές ως DK1 (Δυτική) και DK2 (Ανατολή), συνδεδεμένες με μια γραμμή μεταφοράς ισχύος 600 MW. Στο παρακάτω σχήμα, απεικονίζεται η τιμή εκκαθάρισης και για τις δύο αγορές. Στη DK2 η τιμή κυμαίνεται από 0 έως 36 € / MWh, ενώ στην DK1 φθάνει σε ορισμένα σημεία τα 1000 € / MWh (παρόλο που οι τιμές που απεικονίζονται στην περιοχή κυμαίνονται στα 150 € / MWh για επεξηγηματικούς σκοπούς). Αυτό οφείλεται στη συμφόρηση της γραμμής μεταφοράς (line congestion) και στην επακόλουθη απόρριψη φορτίου (load shedding), καθώς η τοπική παραγωγή ενέργειας στη περιοχή DK1 δεν καλύπτει τη ζήτηση. Σε αυτές τις περιπτώσεις η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας καθορίζεται από την αξία του απορριφθέντος φορτίου, Έχει εκτιμηθεί ότι η αξία του χαμένου φορτίου είναι 1000 € / MWh και ο σκοπός αυτής της υψηλής τιμής είναι διπλός. Αφενός, λειτουργεί ως μέτρο για την επιβολή κυρώσεων στους καταναλωτές για την υπερβολική τους ζήτηση και, αφετέρου, αποτελεί κίνητρο για επενδύσεις για την αύξηση της παραγωγής, δεδομένου ότι το περιθώριο κέρδους είναι μεγάλο .

Ακραίες Τιμές Ηλεκτρικής Ενέργειας (χοντρικής) στη Δανία

Στο παρακάτω διάγραμμα παρατηρούμε την μέση τιμή των τιμών για τις δύο περιοχές. Κατά την εξέταση της DK2, η μέγιστη τιμή βρίσκεται από 18.00 έως 19.00, όταν δηλαδή η ζήτηση κορυφώνεται. Επιπλέον, οι τιμές είναι σχετικά υψηλότερες κατά τις ώρες εργασίας (από 8.00 σε 16.00), όταν η ζήτηση είναι επίσης υψηλή.



Ακραίες Τιμές Ηλεκτρικής Ενέργειας (χοντρικής) στη Δανία



ATZENTA

Μέρος Α

- A1 Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)
- A2 ΘΑΤ σε Χρονοσειρες απο Ντετερμινιστικά Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα (ΘΑΤ σε ΧΔΣ)

Μέρος Β

Εφαρμογές της Κλασικής ΘΑΤ σε χρονοσειρές Χρηματοοικονομικών & Ενεργειακών (Ηλεκτρικών) Αγορών

ΜΕΡΟΣ Α1 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

1. Σπάνια Γεγονότα

Έστω X_0, X_1, \dots **στάσιμη** ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) και F η συνήθης **συνάρτηση κατανομής**, **ΣΚ** (Distribution function, d.f)

$$F(x) = \mathbb{P}(X_0 \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Εάν η τ.μ. είναι **απολύτως συνεχής**, οπότε το **μέτρο** μ_F συνδεδεμένο με την F , τύπου Lebesgue-Stieltjes, Leb , είναι απολύτως συνεχές, ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση Radon-Nikodym

$$f = \frac{d\mu_F}{d\text{Leb}}$$

που συνήθως καλείται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf)**. Εάν f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann και συνεχής στο x , τότε

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

(Billingsley, P. 1995. Probability and Measure)

Όταν έχουμε ένα **πεπερασμένο** δείγμα X_0, \dots, X_{n-1} , τα **σπάνια γεγονότα (rare events)** είναι σχεδόν πάντα συνδεδεμένα με **ακανόνιστες** τιμές των παρατηρήσεων του δείγματος, που σημαίνει ότι ενδιαφερόμαστε για τις **ακραίες (extremal)** παρατηρήσεις (είτε πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές), τυπικά **πάνω (ή κάτω)** από κάποιο **υψηλό (χαμηλό) κατώφλι (threshold)**.

ΜΕΡΟΣ Α1 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Ένα **σπάνιο ή ακραίο γεγονός (extreme event)** αντιστοιχεί στο **συμβάν μίας υπέρβασης (occurrence of exceedance)** ενός κατωφλίου u

$$U(u) := \{X_0 > u\} \quad (1.1)$$

όπου u είναι κοντά στο **δεξί ακρότατο σημείο (right endpoint)** της ΣΚ F , δηλ.

$$u_F = \sup\{x: F(x) < 1\} \quad (\text{πεπερασμένο ή όχι}) \quad (1.2)$$

Επειδή ενδιαφερόμαστε για μεγάλες τιμές της τ.μ., η **συμπεριφορά της ουράς της ΣΚ** είναι **κρίσιμης σημασίας**.

Έστω $\bar{F} = 1 - F$ η **συμπληρωματική (complementary)** συνάρτηση κατανομής. Η **ταχύτητα** με την οποία η $\bar{F}(u)$ πλησιάζει το 0 καθώς $u \rightarrow u_F$, καθορίζει τον **τύπο της ουράς**.

Λέμε ότι η F έχει **χοντρές ουρές (heavy tails)** εάν $u_F = \infty$ και $\bar{F}(u)$ εξαφανίζεται γρήγορα με **πολυωνυμικό** ρυθμό ως προς u , και ότι έχουμε **λεπτές ουρές (light tails)** εάν $u_F < \infty$ ή $\bar{F}(u)$ εξαφανίζεται γρήγορα **εκθετικά** ως προς u .

1. Στατιστική Ακραίας διάταξης (Extremal Order statistics)

- Έστω $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ συμβολίζει τη στατιστική ακραίας διάταξης του δείγματος X_0, X_1, \dots, X_{n-1} , ώστε $X_{1,n}$ είναι το **ελάχιστο** και $X_{n,n}$ το **μέγιστο** του δείγματος.
Έστω

$$M_n := \max\{X_0, \dots, X_{n-1}\} \quad (2.1)$$

έτσι ώστε $X_{n,n} = M_n$. Σημειώνουμε επίσης ότι $X_{1,n} = -\max\{-X_0, \dots, -X_{n-1}\}$

- Ενδιαφερόμαστε για την M_n , διότι σχετίζεται με την **ουρά** της F , δηλαδή με την **ακανόνιστη (abnormal)** συμπεριφορά.
- Η γνώση της M_n μας επιτρέπει να συμπεραίνουμε εάν έχει ή δεν έχει συμβεί μία **υπέρβαση (exceedance)**, μεταξύ των n πρώτων παρατηρήσεων, διότι, εάν συμβαίνει $\{M_n \leq u\}$, τότε **δεν** υπάρχουν υπερβάσεις του κατωφλίου u μέχρι τη στιγμή $n - 1$.
Στήν περίπτωση Ανεξάρτητων Γεγονότων δηλ. εάν X_0, X_1, \dots είναι μία i.i.d τ.μ. τότε το M_n συγκλίνει σχεδόν σίγουρα (σ.σ) στο u_F .

Ερώτημα : Μπορούμε να βρούμε όριο κατανομής (distributional limit) για M_n , όταν **κανονικοποιηθεί κατάλληλα;**

Ορισμός 2.1

Λέμε ότι έχουμε **Νόμο Ακραίας Τιμής, NAT (Extreme Value Law, EVL)** για M_n εάν υπάρχει μία μη-εκφυλισμένη συνάρτηση κατανομής, $H: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ με $H(0) = 0$ και για κάθε $\tau > 0$, υπάρχει μία ακολουθία επιπέδων $u_n = u_n(\tau)$, $n = 1, 2, \dots$ τέτοια ώστε

$$n\mathbb{P}(X_0 > u_n) \rightarrow \tau, \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

για την οποία ισχύει

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) \rightarrow \bar{H}(\tau), \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

όπου η σύγκλιση εννοείται ότι ισχύει στα σημεία συνέχειας της $H(\tau)$.

1. Κλασική Θεωρία Ακραίων Τιμών (Classical Extreme Value Theory). Το πλαίσιο των Ανεξάρτητων, Ομοιόμορφα Κατανεμώμενων (i.i.d) και τα «κλασσικά» αποτελέσματα.

1.1 Μπλόκ Μεγίστων (Block Maxima) και η Γενικευμένη Κατανομή Ακραίας Τιμής Extreme Value Distribution.

Θεωρούμε τη μονοπαραμετρική γραμμική οικογένεια των ακολουθιών (sequences) πραγματικών αριθμών ($u_n = u_n(\tau)$, $n = 1, 2, \dots$)

$$u_n = \frac{y}{a_n} + b_n \quad y \in \mathbb{R}, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

Στη κλασική ΘΑΤ εξετάζουμε την σύγκλιση πιθανοτήτων της μορφής

$$\mathbb{P}(a_n(M_n - b_n) \leq y) \quad (4.2)$$

ΜΕΡΟΣ Α1 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Θεώρημα Ακραίων Τύπων (External Types Theorem)

(Gredenko, 1943, Fisher, A. and Tippett, L., 1928)

Θεώρημα 4.1 (Κύριο αποτέλεσμα-‘προϊόν’ της ΘΑΤ)

Εάν X_0, X_1, \dots είναι μία ακολουθία i.i.d τ.μ. και υπάρχουν γραμμικές ακολουθίες κανονικοποίησης (linear normalizing sequences) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n > 0 \ \forall n$, τέτοιες ώστε

$$\mathbb{P}(a_n(M_n - b_n) \leq y) \rightarrow G(y) \quad (4.3)$$

όπου η σύγκλιση συμβαίνει στα σημεία συνέχειας της κατανομής G και G μία μη-εκφυλισμένη ΣΚ (non-degenerate), τότε

$$G(y) = e^{-\tau(y)},$$

όπου $\tau(y)$ είναι ένας από τους ακόλουθους τύπους νόμου (για κάποια $\beta, \gamma > 0$) αθροιστικών κατανομών (cumulative distributions)

1. $\tau_1(y) = e^{-y}$ για $y \in \mathbb{R}$, Gumbel
2. $\tau_2(y) = y^{-\beta}$ για $y > 0$, Frechet
3. $\tau_3(y) = \gamma$ για $y \leq 0$, Weibull

Μία συνάρτηση πυκνότητας είναι μη-εκφυλισμένη εάν δεν υπάρχει $y_0 \in \mathbb{R}$: $G(y_0) = 1$ και $G(y) = 0, \forall y < y_0$

ΜΕΡΟΣ Α1 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

5. Στάσιμες ακολουθίες και συνθήκες εξάρτησης

Μετά την επιτυχημένη εφαρμογή του θεωρήματος 4.1, στο πλαίσιο των *ανεξάρτητων και ομοιόμορφα κατανομημένων (i.i.d)* τ.μ, έγιναν πολλές προσπάθειες για την μελέτη **ύπαρξης των ΝΑΤ, σε εξαρτημένες (dependent) στασιμες στοχαστικές διαδικασίες**. Με βάση την εργασία των Watson - Loynes, ο Leadbetter ανέπτυξε δύο συνθήκες πάνω στην **δομή της εξάρτησης** των στοχαστικών διαδικασιών.

Οι συνθήκες $D(U_n)$ και $D'(U_n)$ του Leadbetter (1974) διασφαλίζουν την **ύπαρξη των ίδιων νόμων ΑΤ (EVL)** των i.i.d τ.μ., οι οποίοι εφαρμόζονται στις ακολουθίες μερικών μεγίστων (partial maxima) τ.μ., οι οποίες ικανοποιούν τις εν λόγω συνθήκες D και D' .

Θεώρημα (Leadbetter, 1983)

Έστω X_0, X_1, \dots μία στάσιμη στοχαστική διαδικασία και $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία που ικανοποιεί τη σχέση $n\mathbb{P}(X_0 > U_n) \rightarrow \tau$ καθώς $n \rightarrow \infty$, για κάποιο $\tau > 0$. Εάν $D(U_n)$ και $D'(U_n)$ ισχύουν, τότε

$$H(\tau) = e^{-\tau}$$

όπου $H: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], H(0) = 0$ είναι μία μη-εκφυλισμένη (non-degenerate) συνάρτηση κατανομής.

ΜΕΡΟΣ Α1 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Η εμφάνιση Συστάδων Υπερβάσεων, ΣΥ (Clusters of Exceedances)

Η ΣΥ σχετίζεται με τις ιδιότητες **μνήμης (memory)** της **υποκείμενης δυναμικής (underlying dynamics)**.

- Η ΣΥ ουσιαστικά παράγει τον ίδιο τύπο Νόμου Ακραίας Τιμής, NAT (EVL), αλλά με παράμετρο $0 \leq \theta \leq 1$, το **Δείκτη Ακραίας Τιμής ΔΑΤ (Extremal Index, EI)** έτσι ώστε $\bar{H}(\tau) = e^{-\theta\tau}$ όπου ο θ ποσοτικοποιεί την ένταση της Συστάδας.

ΜΕΡΟΣ Α1 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Ορισμός 7.1 (Lyones, 1965, Leadbetter, 1983):

Λέμε ότι X_0, X_1, \dots έχει ένα Δείκτη Ακραίας Τιμής, $0 \leq \theta \leq 1$, εάν έχουμε ένα Νόμο Ακραίας Τιμής NAT για το M_n με $\bar{H}(\tau) = e^{-\theta\tau} \quad \forall \tau > 0$.

- Η παράμετρος θ ποσοτικοποιεί την **ένταση της εξάρτησης** της X_0, X_1, \dots , ώστε $\theta = 1$ δείχνει μία διαδικασία που πρακτικά **δεν** έχει μνήμη, ενώ πολύ μικρές θετικές τιμές, $\theta > 0$, αντιθέτως, φανερώνουν **εξαιρετικά μεγάλη μνήμη (long memory)**.

Ιδιαίτερα εάν $\theta > 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε το αντίστροφο του ΔΑΤ, δηλ. $\frac{1}{\theta}$ ως τον **μέσο αριθμό υπερβάσεων** ενός υψηλού επιπέδου σε μία **συστάδα** μεγάλων παρατηρήσεων, δηλ. ως το **μέσο μέγεθος των συστάδων**

$\frac{1}{\theta}$: μέσο μέγεθος συστάδων υπερβάσεων

Θεώρημα 7.1 (Chernick, M.R et al., 1991)

Έστω X_0, X_1, \dots μία στάσιμη στοχαστική διαδικασία και $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία που ικανοποιεί την $n\mathbb{P}(X_0 > U_n) \rightarrow \tau$ όταν $n \rightarrow \infty$ (NAT). Έστω $D(U_n)$ ισχύει και $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq U_n) > 0$. Εάν για κάθε θετικό k , $D^{(k)}(U_n)$ ισχύει, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}(M_n \leq U_n) - e^{-\theta n \tau}) = 0$$

Όπου $D^{(k)}(U_n)$ είναι μια 'νέα' γενική συνθήκη (βλέπε Chernick, M.R et al., 1991), η οποία αντικαθιστά την $D'(U_n)$ με σκοπό την διασφάλιση της ύπαρξης NAT για κάποιες τιμές $\theta \leq 1$.

ΜΕΡΟΣ Α1 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Modelling Approaches in EVT
(Μέθοδοι Μοντελοποίησης στη ΘΑΤ)

Block Maxima

Generalized Extreme Value Distribution GEVD

$$G(y) = GEV_{\xi}(y) \\ = e^{-(1+\xi y)^{-\frac{1}{\xi}}}, 1 + \xi y > 0, \text{ εάλν } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-y}}, y \in \mathbb{R}, \text{ εάλν } \xi = 0$$

- Εάλν $\xi = 0 \rightarrow$ Τύπος Gumbel

Εάλν $\xi > 0 \rightarrow$ Τύπος Frechet

Εάλν $\xi < 0 \rightarrow$ Τύπος Weibull

Peak over Threshold POT
or Threshold Excedances

Generalized Pareto Distribution GPD

$$GPD_{\xi, \sigma} = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{εάλν } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}}, & \text{εάλν } \xi = 0 \end{cases}$$

$\xi \in \mathbb{R}$: παράμετρος **μορφής**
(shape parameter)

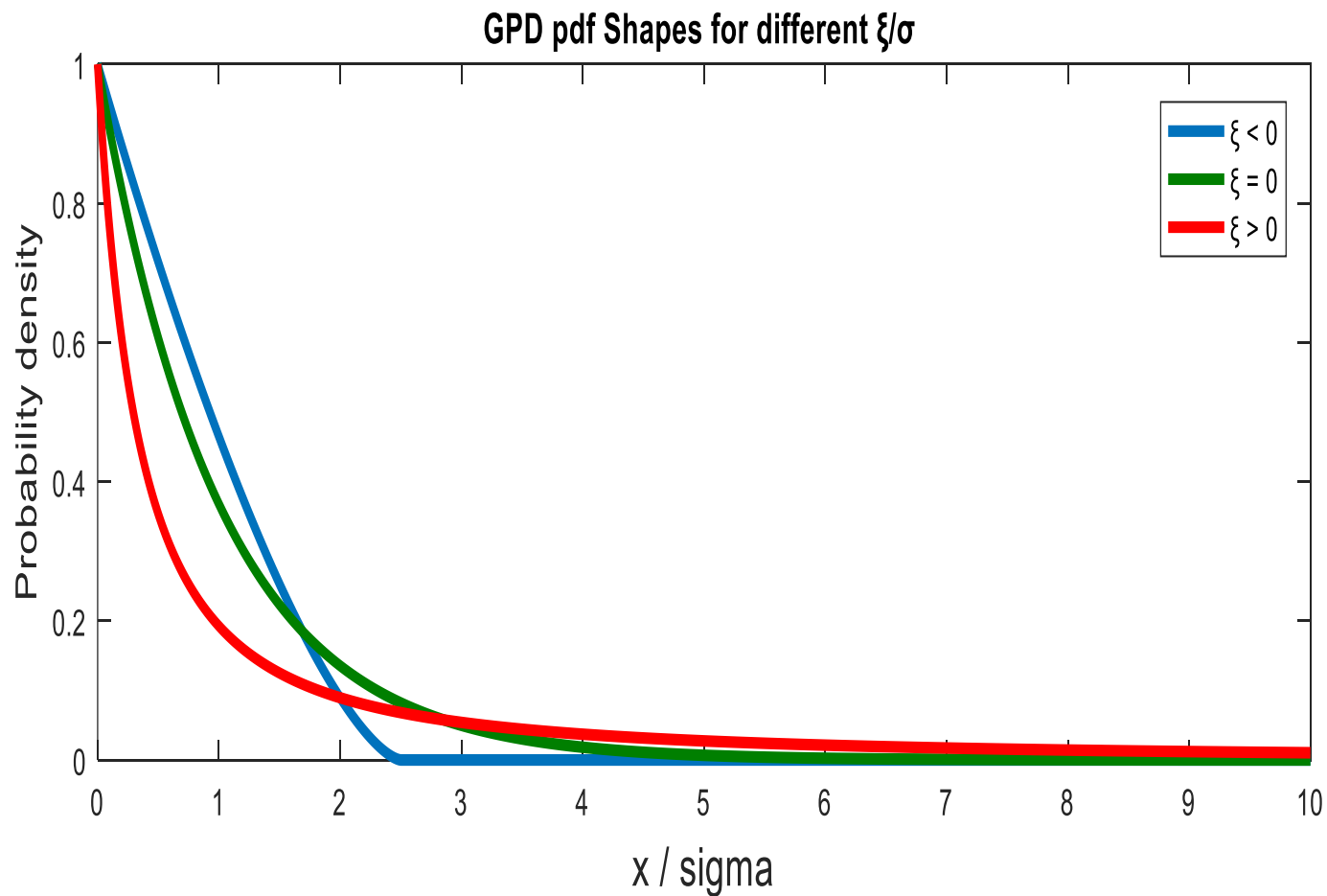
$\sigma > 0$: παράμετρος **κλίμακος** **(scale parameter)**

ΜΕΡΟΣ Α1 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

$\xi > 0$ Heavy-Tailed : Pareto, Student-t, Cauchy, loggamma, Frechet

$\xi = 0$ Thin-Tailed : Gumbel, Normal, Exponential, gamma, lognormal

$\xi < 0$ Finite Distribution : Uniform, Beta



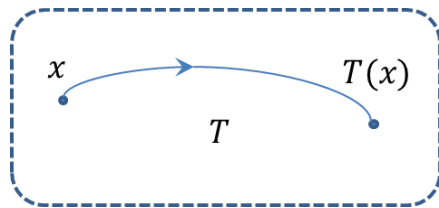
Ακραίες Τιμές και Δυναμικά Συστήματα



- Ακανόνιστη, τυχαία συμπεριφορά
- Δύσκολα διακριτή από κατανομή καθαρά Τυχαίων Αριθμών
- Ευαισθησία στις Α.Σ.
- Butterfly effect, Lorenz '68



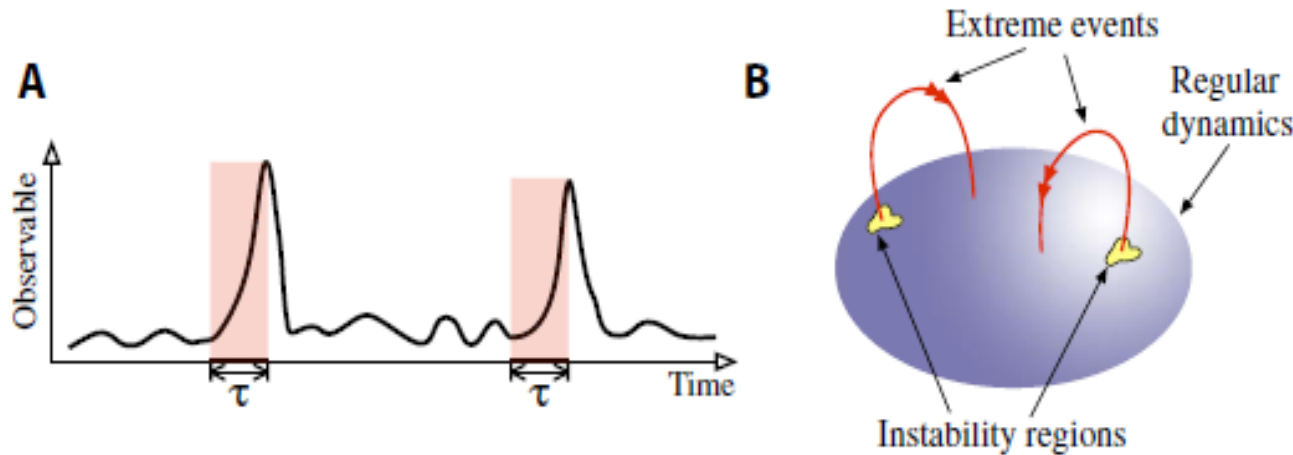
- Σπάνια γεγονότα από χασοτικά Δ.Σ.
- Τα **χαρακτηριστικά** της τυχαίας - χασοτικής δυναμικής έχουν **κρίσιμη επίδραση** στις **ιδιότητες των ακραίων τιμών (extremes)**



- ❖ Έστω \mathcal{X} ο χώρος φάσεων, «προικισμένος» με κάποια **τοπολογική** ή **διαφορίσιμη** ή **μετρο-θεωρητική** δομή.
- ❖ Έστω \mathcal{B} η σ -άλγεβρα των υποσυνόλων του \mathcal{X} , οποία παρέχει τη **μετρήσιμη** δομή.
- ❖ Το ίδιο σύστημα παριστάνεται με μία απεικόνιση (μετρήσιμη), T , έτσι ώστε $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ η χρονική εξέλιξη του συστήματος, ο νόμος (κανόνας) μετάβασης από την αρχική **κατάσταση** $x \in \mathcal{X}$ (μετά από μία μονάδα χρόνου).

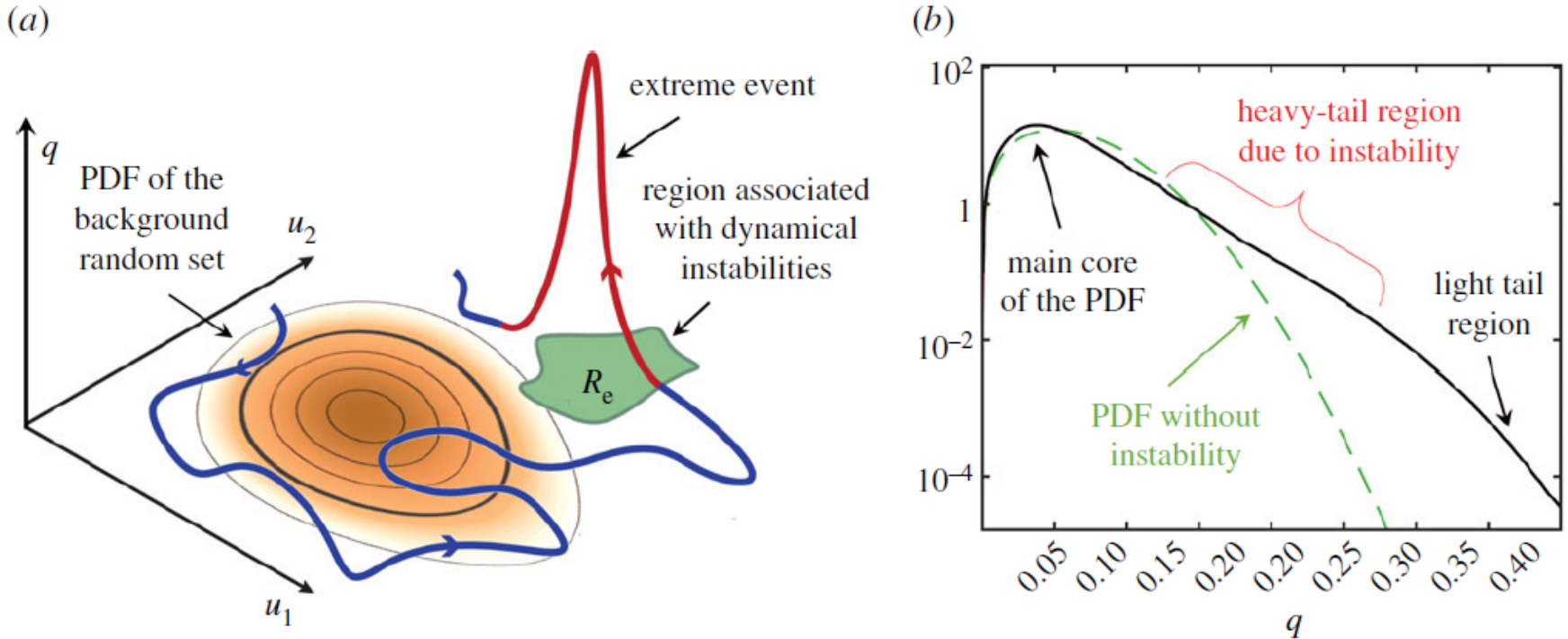
- ❖ Απαιτείται η ύπαρξη **μέτρου πιθανότητας** \mathbb{P} , ορισμένη στο \mathcal{B} , συνεπούς με την T , με την έννοια ότι $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$ δηλαδή \mathbb{P} είναι T -αναλλοίωτο.
- ❖ Ορίζουμε την **τροχιά (orbit)**, για μία αρχική κατάσταση $x \in \mathcal{X}$, ως την ακολουθία των καταστάσεων $x, T(x), T^2(x) \dots$ όπου $T^n(x) = \underbrace{T \circ T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ φορές}}(x)$ η n -οστή επανάληψη του T .
- ❖ Ο κύριος στόχος της Θεωρίας Δυναμικών Συστημάτων είναι η μελέτη της **μακροχρόνιας συμπεριφοράς των τροχιών** του συστήματος.
- ❖ Ένα **σπάνιο γεγονός** παρέχεται από ένα υποσύνολο $A \subset \mathcal{X}$ του χώρου φάσης που ανήκει στο \mathcal{B} και τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(A)$ είναι μικρή.

EXTREME EVENTS in DYNAMICAL (CHAOTIC) SYSTEMS



Γεωμετρία του Χώρου καταστάσεων Ακραίων Γεγονότων ΑΓ Α) Αναπαράσταση **διαλειπτόμενων εκρήξεων** ενός παρατηρήσιμου μεγέθους. Οι σκιασμένες περιοχές εντοπίζουν μια “προσέγγιση” του σταδίου ενίσχυσης (ανάπτυξης) του ΑΓ. Β) Στο χώρο καταστάσεων, τα ΑΓ θεωρούνται ως “ταχείς αποδράσεις” μακριά από το κύριο σώμα (μπλέ σφαιρα), οφειλόμενες σε μικρές περιοχές αστάθειας.

EXTREME EVENTS in DYNAMICAL (CHAOTIC) SYSTEMS



a) Extreme events are associated with large excursions due to the random triggering of dynamical instabilities. The shaded region indicates the PDF associated with the attractor of the system or more generally the set where the system lies most of the time. The instability region is in green. (b) A typical heavy-tailed distribution for extreme events. The heavy-tail region has finite extent because instabilities cannot lead to arbitrarily large magnitude. On the other hand, for rare events the PDF has often a uniform tail behaviour.

ΜΕΡΟΣ Α2 : ΘΑΤ σε Χρονοσειρες απο Ντετερμινιστικά Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα (ΘΑΤ σε ΧΔΣ)

- Πώς η **Κλασσική Θεωρία Ακραίων Τιμών** μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θεωρία των χαοτικών ΔΣ;
 - Χρησιμοποιώντας το **Χαοτικό ΔΣ** να παράξει χρονοσειρές (τροχιές), μέσω της εκτίμησης μίας συγκεκριμένης **παρατηρήσιμης οντότητας** (observable), κατά μήκος της τροχιάς.
 - Έστω $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ μία μετρήσιμη συνάρτηση, και ορίζουμε τη **στοχαστική** διαδικασία X_0, X_1, \dots , που δίνεται από $X_0 = \varphi$ και $X_n = \varphi \circ T^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Μία **πραγματοποίηση** μίας τέτοιας διαδικασίας αντιστοιχεί στην επιλογή μίας **αρχικής κατάστασης** $x \in \mathcal{X}$ τυχαία, σύμφωνα με το \mathbb{P} , και κατόπιν την εκτίμηση της συνάρτησης φ κατά μήκος όλων των σημείων της τροχιάς $x, T(x), T^2(x), \dots$
 - Η **υπέρβαση (exceedance)** ενός συγκεκριμένου **κατωφλίου** u , σημαίνει ότι η τροχιά τέμνει (hits) μία περιοχή του χώρου φάσεων, που περιγράφεται από
$$U(u) = \{X_0 > u\}$$

Επίσης, σημειώνουμε ότι

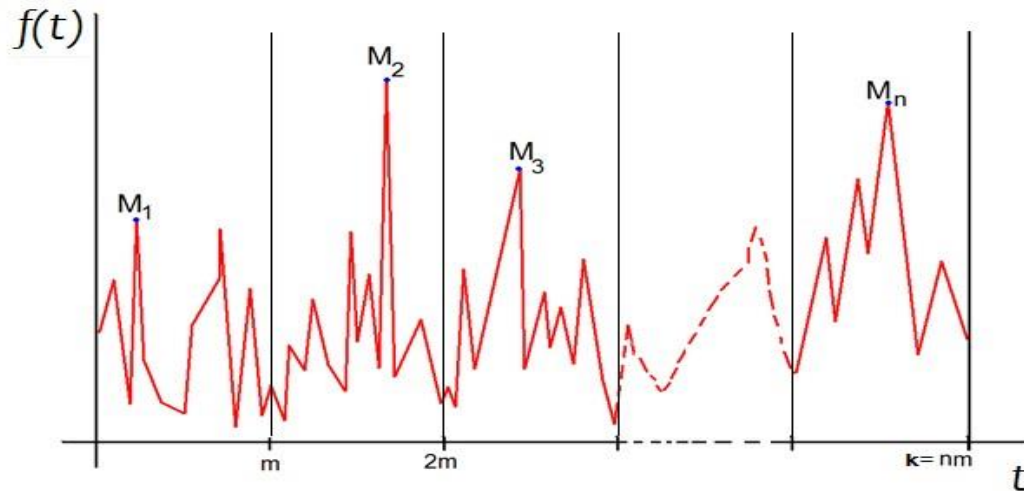
$$T^{-1}(\{M_n \leq u\}) = \{r_{U(n)} > n\}$$

Που σημαίνει ότι: **θα πρέπει να υπάρχει μία σύνδεση ανάμεσα στην ύπαρξη ενός Νόμου Ακραίας Τιμής (NAT) (Extreme Value Law, EVL) και της ύπαρξης των HTS.**

ΜΕΡΟΣ Α2 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Τι είναι μία **Ακραία Τιμή** ? Η μέθοδος **Μπλοκ Μεγίστων (Block Maxima)**

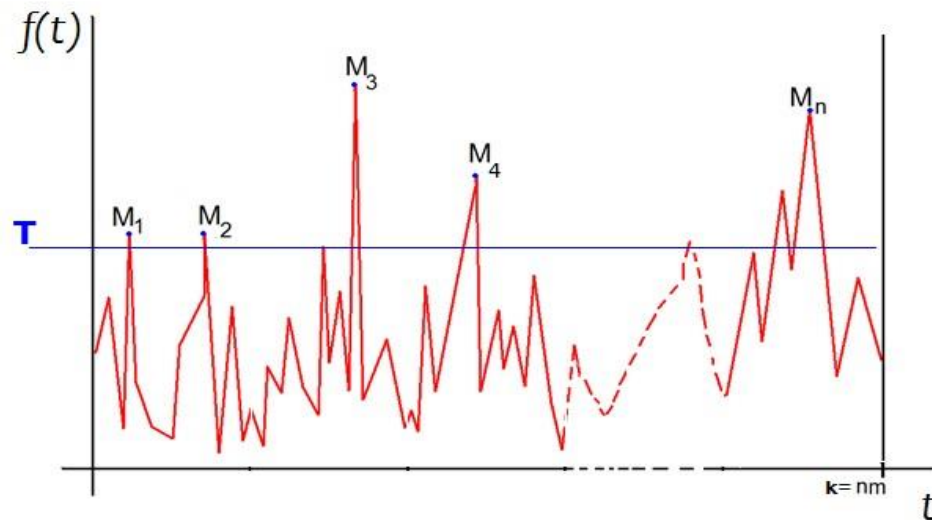
Από την χρονοσειρά $f(t)$ επιλέγουμε ένα σύνολο από n μέγιστα M_n .
Ανα m παρατηρήσεις παίρνουμε το μέγιστο.



ΜΕΡΟΣ Α2 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Μέθοδος ΑΤ πάνω από κατώφλι (Peak over Threshold POT)

- Επιλέγουμε ένα κατώφλι (Threshold) T
- Θεωρούμε όλα τα M_n πάνω από το κατώφλι



ΜΕΡΟΣ Α2 : ΘΑΤ σε Χρονοσειρες απο Ντετερμινιστικά Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα (ΘΑΤ σε ΧΔΣ)

Παρατηρήσιμα μεγέθη $\Delta\Sigma$ (observables) και αντίστοιχοι Νόμοι Ακραίας Τιμής

Υποθέτουμε ότι το παρατηρήσιμο $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι της μορφής

$$\varphi(x) = g(\text{dist}(x, \zeta))$$

όπου ζ είναι το επιλεγμένο σημείο (**σημείο αναφοράς**) στο **χώρο φάσης** \mathcal{X} και η συνάρτηση $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι τέτοια ώστε το μηδέν (0) είναι ένα **ολικό μέγιστο** ($g(0)$ ίσως είναι το $+\infty$) .
 $\text{dist}(x, \zeta)$ συμβολίζει την απόσταση μεταξύ x, ζ

Η g είναι αυστηρά φθίνουσα αμφιμονοσήμαντη - επί - απεικόνιση (bijection), $g: V \rightarrow W$ σε μία γειτονιά V του μηδέν (0), και έχει μία από τις ακόλουθες μορφές:

Υπάρχουν 3 κατάλληλοι τύποι της $g(\text{dist}(x, \zeta))$

$$g_i = g(\text{dist}(f^m(x), \zeta)), i = 1, 2, 3, \forall m \in \mathbb{N}$$

Τύπος g_1

Υπάρχει μία αυστηρά θετική συνάρτηση $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{s \rightarrow g_1(0)} \frac{g_1^{-1}(s + yh(s))}{g_1^{-1}(s)} = e^{-y} \quad (1)$$

Τύπος g_2

$g_2(0) = +\infty$, υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $y > 0$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g_2^{-1}(sy)}{g_2^{-1}(s)} = e^{-\beta} \quad (2)$$

Τύπος g_3

$g_3(0) = D < +\infty$, και υπάρχει $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $y > 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_3^{-1}(D - sy)}{g_3^{-1}(D - s)} = y^\gamma \quad (3)$$

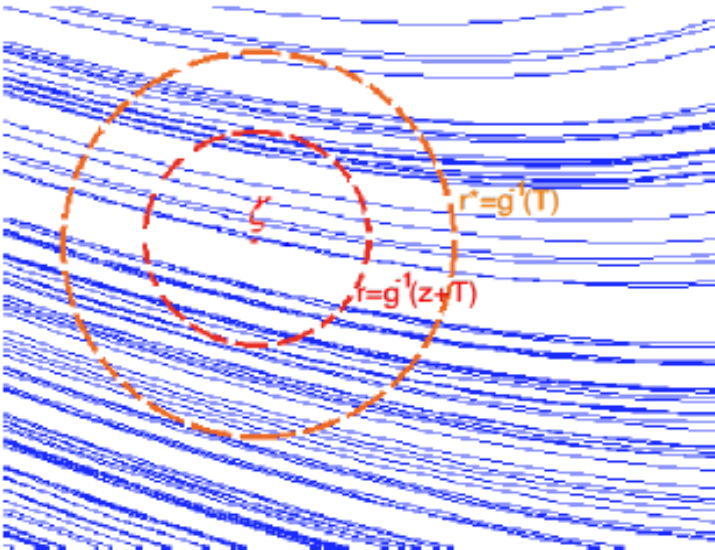
Παραδείγματα των παραπάνω τριών τύπων είναι ως εξής:

1. $g_1(x) = -\log x$: (η (1) εύκολα αποδεικνύεται με $h \equiv 1$)
2. $g_2(x) = x^{-1/a}$ για κάποιο $a > 0$: (η (2) αποδεικνύεται με $\beta = a$)
3. $g_3(x) = D - x^{1/a}$ για κάποιο $D \in \mathbb{R}$ και $a > 0$: (η (3) αποδεικνύεται με $\gamma = a$)

ΜΕΡΟΣ Α2 : ΘΑΤ σε Χρονοσειρες απο Ντετερμινιστικά Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα (ΘΑΤ σε ΧΔΣ)

Συστήματα Αξιώματος Α (ΣΑΑ) (Axiom A Systems) : Με τον “Φακό” της Στατιστικής Μηχανικής

- Ειδική κατηγορία Δυναμικών Συστημάτων , με **αναλλοίωτο μέτρο SRB** (Sinai_Ruelle-Bowen (Eckman-Ruelle, 1985)
- Διακρίνονται από **ομοιόμορφη υπερβολικότητα (UNIFORM HYPERBOLICITY)**, στο σύνολο ελκυσμού (attracting set)
- Επιτρέπουν την ανάπτυξη **Θεωρία Απόκρισης** (Response Theory, Ruelle, 1988)
- Εξαιρετικό Παράδειγμα **Υψηλοδιάστατων ΔΣ**
- Εξαιρετικά χρήσιμο πλαίσιο για την μελέτη της **σχέσης** ανάμεσα στις **παραμέτρους των (κατανομών) ΑΤ** και στις **Γεωμετρικές και δυναμικές ιδιότητες του ΔΣ**, και ιδίως της **ευαισθησίας των ΑΤ σε μικρες διαταραχές του ΔΣ !!!!!!!**
- Ικανοποιούν όλες τις απαιτήσεις **ανάμειξης (mixing)** λόγω **εργοδικότητας**



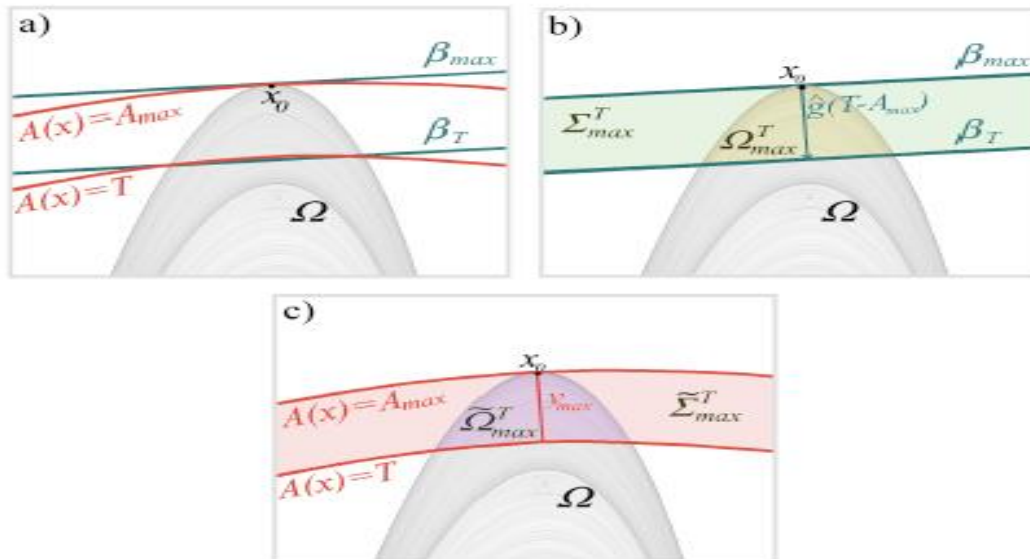
Σχήμα : Εάν θεωρήσουμε μια παρατηρήσιμη συνάρτηση $g=g(r)$, όπου r η απόσταση από ζ και g

μονοτόνως φθίνουσα με μέγιστο για $r=0$, γεγονότα πάνω από T δίνονται από τις κλειστές επιστροφές (returns) κοντά στο ζ , σε μία απόσταση r από το ζ μικρότερη από $r^* = g^{-1}(T)$. **Η δεσμευμένη πιθανότητα των υπερβάσεων η Ακραίων Τιμών (exceedances), κατασκευάζεται από το κλάσμα της μάζας του ελκυστή που περιέχεται εντός της σφαίρας ακτίνας r , προς την μάζα του ελκυστή που περιέχεται εντός μιας σφαίρας ακτίνας r^***

ΜΕΡΟΣ Α2 : ΘΑΤ σε Χρονοσειρες απο Ντετερμινιστικά Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα (ΘΑΤ σε ΧΔΣ)

Φυσικές παρατηρήσιμες συναρτήσεις (Γεωφυσική, Μηχανική Ρευστών κλπ)

Φυσικές παρατηρήσιμες συναρτήσεις

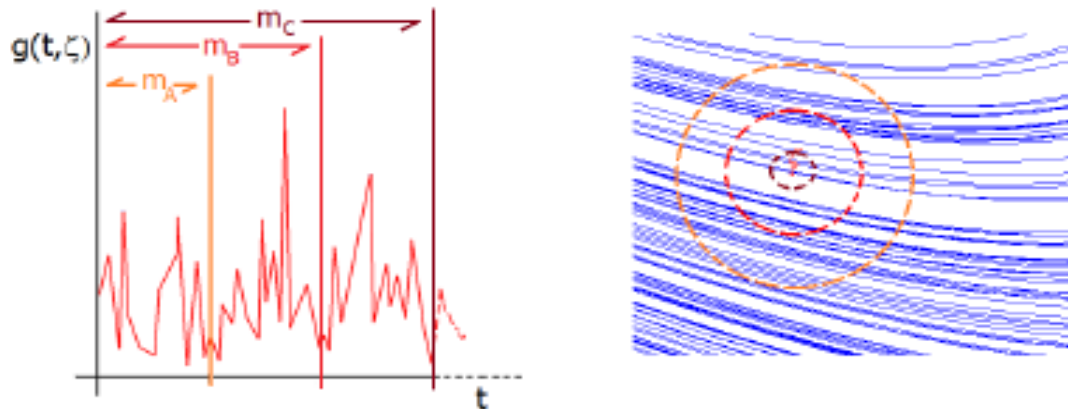


Σχήμα : Χαμηλο-διάστατη αναπαράσταση της Γεωμετρικής κατασκευής που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή **Νόμου Ακραίας Τιμής (NAT)** , για υπερβάσεις πάνω από κατώφλι T , για την παρατηρήσιμη συνάρτηση $A(x)$ τέτοια ώστε $\max_{x \in \Omega} A(x) = A_{max}$ επιτυγχάνεται για $x=x_0$. α) Δείχνονται οι **πολλαπλότητες** $A(x) = A_{max}$ και $A(x)=T$, μαζί με το **αναλλοίωτο σύνολο έλξης** Ω και τα δύο υπερ-επίπεδα β_{max} και β_T . Το β_{max} είναι εφαπτόμενο στο $A(x) = A_{max}$, στο σημείο x_0 και το β_T προκύπτει από το β_{max} μέσω μετατόπισης κατά μήκος του $(T-A_{max})$. β) Τα υπερ-επίπεδα β_{max} και β_T περιβάλλουν την περιοχή Σ_{max}^T * . Οι τομές τους με το Ω είναι Ω_{max}^T . γ) Οι **πολλαπλότητες** $A(x) = A_{max}$ και $A(x)=T$ περιβάλλουν την περιοχή $\tilde{\Sigma}_{max}^T$. Η τομή του με το Ω είναι $\tilde{\Omega}_{max}^T$. Καθώς $T \rightarrow A_{max}$, λαμβάνουμε $\Omega_{max}^T \rightarrow \tilde{\Omega}_{max}^T$.

ΜΕΡΟΣ Α2 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Οι Ακραίες Τιμές ως Δυναμικοί και Γεωμετρικοί Δείκτες

Η μέθοδος Μπλόκ Μεγίστων (Block Maxima)



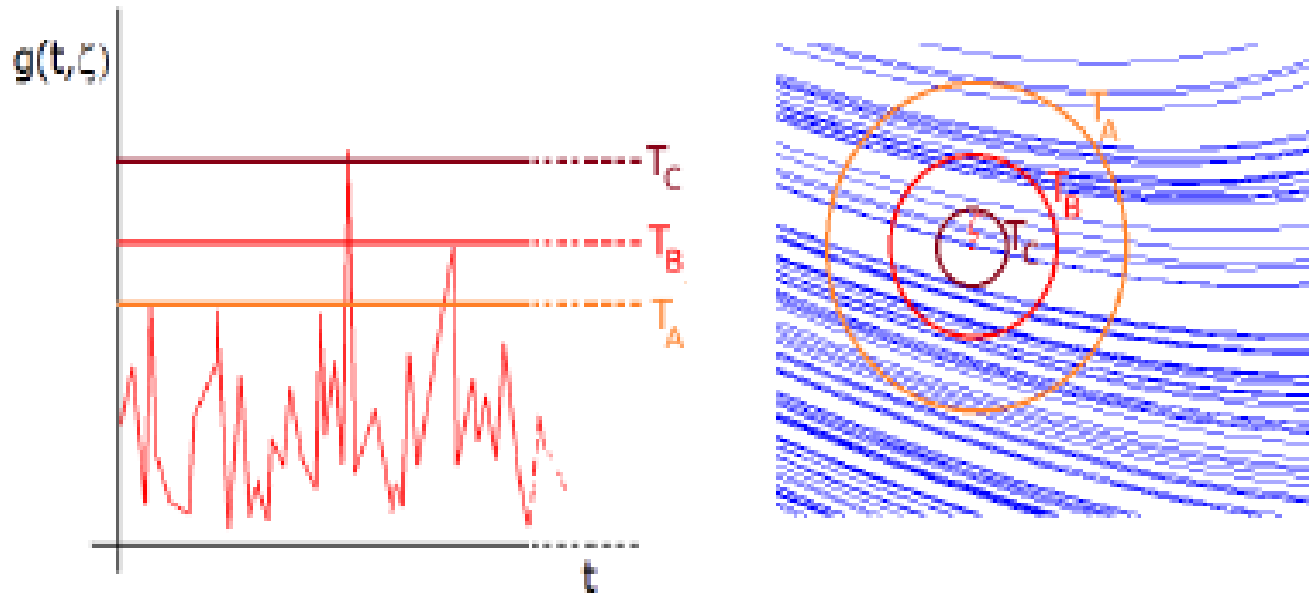
Σχήμα : Η μέθοδος Μπλόκ Μεγίστων (Block Maxima) για την παρατηρήσιμη συνάρτηση g_i .

Όσο αυξάνει το μήκος του bin τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα δειγματοληψίας ακραίων τιμών , σε μικρότερη σφαίρα, με κέντρο το ζ .

ΜΕΡΟΣ Α2 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Οι Ακραίες Τιμές ως Δυναμικοί και Γεωμετρικοί Δείκτες

Η Μέθοδος μεγιστων Τιμών πάνω από Κατώφλι (Peak Over Threshold, POT).



Σχήμα : Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου POT για παρατηρήσιμη συνάρτηση g_i

ΜΕΡΟΣ Α2 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Οι Ακραίες Τιμές ως Δυναμικοί και Γεωμετρικοί Δείκτες

Αριθμητικά Παραδείγματα : Απεικονίσεις που έχουν αναλλοίωτο μέτρο Lebesgue

Λογιστική απεικόνιση

- For g_1 -type observables:

$$\sigma = \frac{1}{d} \quad \mu = C_1 + \frac{1}{d} \log(n) = C_2 - \frac{1}{d} \log(k) \quad \xi = 0,$$

where C_1 and C_2 is a positive constant.

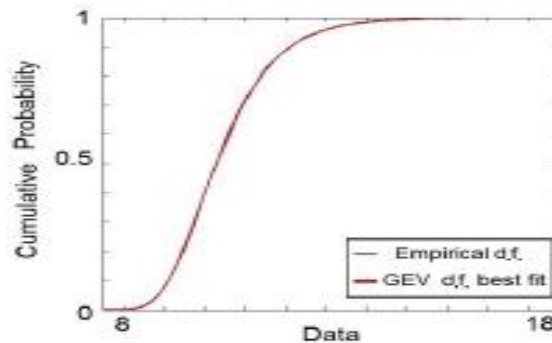
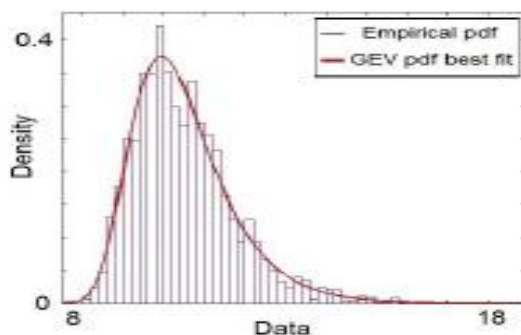
- For g_2 -type observables:

$$\sigma \propto n^{1/(\alpha d)} \propto k^{-1/(\alpha d)} \quad \mu \propto n^{1/(\alpha d)} \propto k^{-1/(\alpha d)} \quad \xi = \frac{1}{\alpha d}$$

- For g_3 -type observables:

$$\sigma \propto n^{-1/(\alpha d)} \propto k^{1/(\alpha d)} \quad \mu = C \quad \xi = -\frac{1}{\alpha d}$$

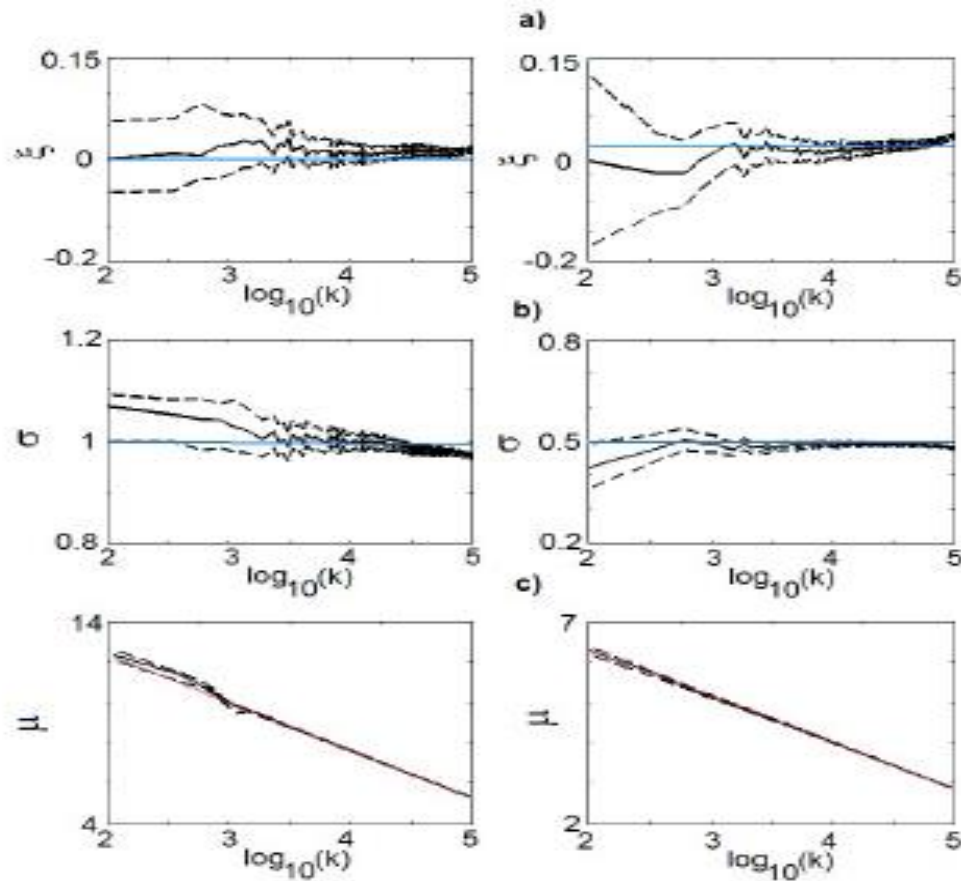
where $x \propto y$ indicates that x/y is a constant.



Σχήμα : **(Αριστερά)** Ιστόγραμμα των τιμών της g_1 και της προσαρμοσμένης σε αυτές θεωρητική κατανομή GEV (ΓΚΑΤ Γενικευμένη Κατανομή Ακραίων Τιμών). **(Δεξιά)** Εμπειρική αθροιστική κατανομή (cdf) των τιμών της g_1 και της θεωρητικής GEV. Λογιστική απεικόνιση, $n=10^4$, $m=10^4$.

Οι Ακραίες Τιμές ως Δυναμικοί και Γεωμετρικοί Δείκτες

Παρατηρήσιμη συνάρτηση g_1 . Οι απεικονίσεις Arnold Cut και Bernoulli shift

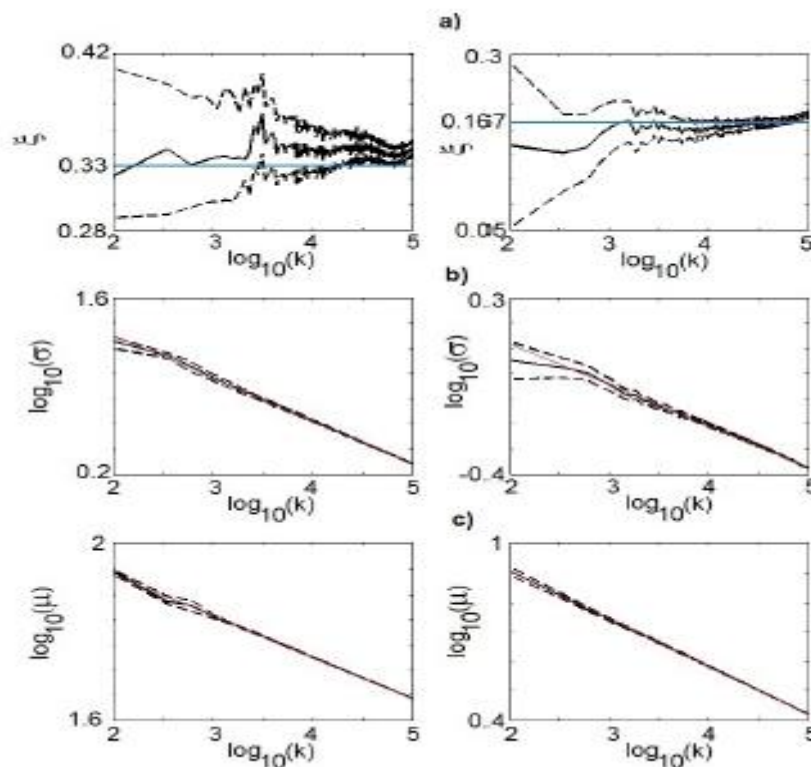


Σχήμα : Παρατηρήσιμη συνάρτηση g_1 . (Αριστερά) **Arnold Cut map**, (δεξιά) **Bernoulli shift map**. Οι διακεκομμένες τιμές παριστάνουν διαστήματα εμπιστοσύνης, οι γκρι γραμμές γραμμικές προσαρμογές και θεωρητικές τιμές.

ΜΕΡΟΣ Α2 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ) (Classical Extreme Value Theory)

Οι Ακραίες Τιμές ως Δυναμικοί και Γεωμετρικοί Δείκτες

Παρατηρήσιμη συνάρτηση g_2 . Οι απεικονίσεις Arnold Cut και Bernoulli shift



Σχήμα : Παρατηρήσιμη συνάρτηση g_2 . (Αριστερά) **Arnold Cut map**, (δεξιά) **Bernoulli shift map**. Οι διακεκομμένες τιμές παριστάνουν διαστήματα εμπιστοσύνης, οι γκρι γραμμές γραμμικές προσαρμογές και θεωρητικές τιμές.

ΜΕΡΟΣ Α2 : Βασικά στοιχεία Κλασικής Θεωρίας Ακραίας Τιμής (ΘΑΤ)

(Classical Extreme Value Theory)

Αριθμητικά Παραδείγματα : Απεικονίσεις που έχουν ιδιάζων (Singular) αναλλοίωτο μέτρο.

Cantor Set, απεικονίσεις Baker, Hénon και Lozi (hyperbolic Dynamical Systems)

Lozi map : $f_{a,b}(x, y) = (1 + y - |x|, bx)$

Hénon map : $f_{a,b}(x, y) = (1 + y - ax^2, bx)$

a=1.4, b=0.3 για την απεικόνιση Hénon, και a=1.7, b=0.5 για την απεικόνιση Lozi

Παρατηρήσιμες συναρτήσεις (Observables)

- For g_1 -type observables:

$$\sigma = \frac{1}{d(\zeta)} \quad \mu = C_1 + \frac{1}{d(\zeta)} \log(n) = C_2 - \frac{1}{d(\zeta)} \log(k) \quad \xi = 0$$

where C_1 and C_2 are positive constants.

- For g_2 -type observables:

$$\sigma \propto n^{1/(\alpha d(\zeta))} \propto k^{-1/(\alpha d(\zeta))} \quad \mu \propto n^{1/(\alpha d(\zeta))} \propto k^{-1/(\alpha d(\zeta))} \quad \xi = \frac{1}{\alpha d(\zeta)}$$

- For g_3 -type observables:

$$\sigma \propto n^{-1/(\alpha d(\zeta))} \propto k^{1/(\alpha d(\zeta))} \quad \mu = C \quad \xi = -\frac{1}{\alpha d(\zeta)}$$

Υπολογισμός της διάστασης πληροφορίας (Information Dimension)

$$d_1 = \int d\mu(\zeta) \delta(\zeta) \quad \text{ως} \quad d_1 \sim \frac{1}{p} \sum_{j=1}^q d(\zeta_j)$$

Πίνακας : Εκτίμηση Διάσταση πληροφορίας μέσω g_i παρατηρήσιμων συναρτήσεων ΑΤ.

d_1	Baker	Hénon	Lozi	Cantor
Theor.	1.4357	1.2582	1.4042	$\log(2)/ \log(3) \sim 0.6309$
$\sigma(g_1)$	1.43 ± 0.03	1.21 ± 0.02	1.39 ± 0.02	0.635 ± 0.005
$\mu(g_1)$	1.48 ± 0.03	1.23 ± 0.02	1.40 ± 0.01	0.64 ± 0.01
$\xi(g_1)$	1.41 ± 0.02	1.24 ± 0.02	1.41 ± 0.01	0.63 ± 0.01
$\sigma(g_2)$	1.39 ± 0.04	1.35 ± 0.07	1.38 ± 0.02	0.63 ± 0.01
$\mu(g_2)$	1.47 ± 0.02	1.24 ± 0.01	1.40 ± 0.01	0.64 ± 0.01
$\xi(g_3)$	1.45 ± 0.02	1.28 ± 0.02	1.4 ± 0.01	0.64 ± 0.01
$\sigma(g_3)$	1.56 ± 0.08	1.15 ± 0.07	1.42 ± 0.01	0.64 ± 0.01

Θεωρία Ακραίων Τιμών για Επιλεγμένα Δυναμικά Συστήματα

Πίνακας Δυναμικών Συστημάτων για τα οποία έχει αποδειχθεί η ύπαρξη Νόμου Ακραίων Τιμών (NAT)

Απεικόνιση (Map)	Μαθηματική Έκφραση	Παρατηρήσιμη Συνάρτηση	Σύγκλιση σε NAT
1 Απεικόνιση Tent (Tent Map)	$f(x) = 1 - 1 - 2x $ στο $[0,1]$	$\varphi(x) = -\log x - \bar{x} $	$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{M_n \leq u + \log n\} = e^{-2e^{-u}}$
2 Οικογένεια τετραγωνικών απεικονίσεων (quadratic family)	$f(x) = a - x^2, a \approx 2 \quad x \in [-2,2]$	$\varphi(x) = -\log x - \bar{x} $	$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{M_n \leq u + \log n\} = e^{-2\rho(\bar{x})e^{-u}}$
3 Μονοδιάστατες απεικονίσεις Lorenz (1-D Lorenz maps)	$f: [-1,1] \setminus \{0\} \rightarrow [-1,1]$ (L1) Για $C > 0, \lambda > 1: x \in I$ και $n > 0, (f^n)'(x) > C\lambda^n$ (L2) Για $\beta \in (0,1): f'x = x ^{\beta-1}g(x)$ όπου $g \in C^{\beta\epsilon}(X), g > 0$ (L3) f είναι τοπικά επί, για κάθε διάστημα $J \subset X$, υπάρχει $K = K(J) > 0: f^K(J) = X$	$\varphi(x) = -\log x - \bar{x} $	Για απεικόνιση Lorenz που ικανοποιούνται οι L1, L2, L3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{M_n \leq U_n\} = e^{-2\rho(\bar{x})e^{-u}}$ όπου ρ πυκνότητα του αναλλοίωτου μέτρου μ
4 Μη-Ομοιόμορφα αναπτυγμένες απεικονίσεις διαλειπτότητας (Non-uniformly Expanding Intermittency Maps)	$f(x) = \begin{cases} x(1 + (2x)^b), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$	$\varphi(x) = -\log x - \bar{x} $	$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{M_n \leq U_n\} = e^{-2\rho(\bar{x})e^{-u}}$
5 Υπερβολικά Δ.Σ (Hyperbolic D.S). Απεικόνιση Cat του Arnold (Arnold Cat Map)	$f(x, y) = (2x + y, x + y) \text{ mod } T^2$ όπου $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \quad \bar{x} \in [0,1]$	$\varphi(x) = -\log(\text{dist}(x, \bar{x}))$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{M_n \leq (u + \log n)/2\} = e^{-\pi e^{-u}}$
6 Απεικονίσεις τύπου Lozi (Lozi-like Maps)	$f_{a,b}(x, y) = (1 + y - a x , bx)$ a, b παράμετροι	$X_n(x) = -\log(d(x_0, f^n(x)))$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n \leq U_n(v)) = e^{-e^{-v}}$
7 Διαχυόμενα Μπιλιάρδα Sinai (Sinai Dispersing Billiards)	$\Gamma = \{\Gamma_i, i = 1: k\}$ $f: T^2 \setminus \Gamma \rightarrow T^2$	$X_n(x) = -\log(d(x_0, f^n(x)))$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n \leq (v + \log n + \log(\rho(x_0)))/2) = e^{-e^{-v}}$

Chaos, Solitons & Fractals 74 (2015) 46–54



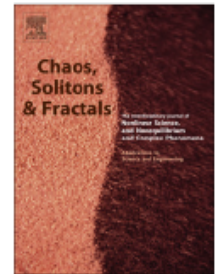
ELSEVIER

Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Chaos, Solitons & Fractals

Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena

journal homepage: www.elsevier.com/locate/chaos



Review

Extreme events and dynamical complexity



C. Nicolis^{a,*}, G. Nicolis^b

^a *Institut Royal Météorologique de Belgique, 3 Avenue Circulaire, 1180 Brussels, Belgium*

^b *Interdisciplinary Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine, CP 231, bd du Triomphe, 1050 Brussels, Belgium*

ARTICLE INFO

Article history:

Available online 13 January 2015

ABSTRACT

The principal signatures of deterministic dynamics in the probabilistic properties of extremes are identified. Analytical expressions for n -fold cumulative distributions and their associated densities are derived. Substantial differences from the classical statistical theory of extreme values are found and illustrated on generic classes of dynamical systems giving rise to fully developed chaos and to quasi-periodic behavior.

ΜΕΡΟΣ Α : Μικρή αναφορά της συνεισφοράς Γ. Νίκολη στη ΘΑΤ σε ΧΔΣ

Σχολές σκέψης της ΘΑΤ (Θεωρία Ακραίων Τιμών) EVT, στα ντετερμινιστικά Δ.Σ.

1) Αρχικές –Πρώιμες Εργασίες: οι «Πρωτεργάτες»

- ✚ Balakrishnan, V., Nicolis, C. and Nicolis, G. (1995). Extreme value distributions in chaotic dynamics. *Journal of Statistical Physics*, 80(1): 307-336.
- ✚ Collet (2001). Statistics of closest return for some non-uniform hyperbolic system. *Ergod. Theory Dyn. Syst.*, 21: 401-420.

2) Θεμελιώδεις μέχρι σήμερα εργασίες

Συνθήκες υπό τις οποίες κάποια είδη παρατηρήσιμων (**observables**) μπορούν να περιγραφούν από την **GEVD (Generalized Extreme Value Distribution) (Γενικευμένη Κατανομή AT)** και τη σύνδεση των κρίσιμων παραμέτρων της όπως του δείκτη ουράς (**tail index**) και της παραμέτρου μορφής (**shape parameter**) (που χαρακτηρίζουν την πτώση (decay) της ουράς), με κάποιες **Μορφοκλασματικές διαστάσεις (fractal dimensions)**

- Collet, 2001
- Freitas et al., 2009
- Lucarini et al., 2012
- Holland et al., 2012
- Lucarini et al., 2014
- Lucarini et al., 2016
- Bodai, T. (2017). EVA in Dynamical Systems: two case studies. In: Franzke, C.L.E. and O’Kane, T.J. (eds). *Nonlinear and Stochastic Dynamics*. Cambridge University Press, pp. 392-429.
-

3) Μη-κλασσικές «υπογραφές» Κατανομών Ακραίων Τιμών (KAT)

- Nicolis, C. Balakrishnan, V. and Nicolis, G. (2006). Extreme events in deterministic dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 97:210602
- Nicolis, C. and Nicolis, G. (2012). Extreme events in multivariate deterministic systems. *Phys. Rev. E*, 85:056217

Περιοδικές η Ψεύδο-περιοδικές τροχιές

- Αν σε μια γειτονιά ενός σημείου ζ , οι συνθήκες **ανάμειξης (mixing)** δεν ικανοποιούνται, δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε Νόμο Ακραίας Τιμής (NAT) (GEV)
- Για πεπερασμένο μέγεθος δείγματος, η συμπεριφορά του $\Delta\Sigma$ μπορεί να εξηγηθεί μέσω των αποτελεσμάτων της εργασίας των Balakrishan, Nicolis G et al., 1995. :

Εάν επιλέξουμε ως παρατηρήσιμη συνάρτηση $f_*(t) = \min(\text{dist}(x_t, \zeta))$, και αναζητήσουμε τις ΑΤ με την μέθοδο Block maxima (BM), τότε λαμβάνουμε μια κατά τμήματα (piecewise) γραμμική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf)

Παράδειγμα

Τυπική απεικόνιση (Standard map)

$$y_{t+1} = y_t + \frac{k}{2p} \sin 2\pi x_t$$
$$x_{t+1} = y_t + x_t \text{ mod } 1$$

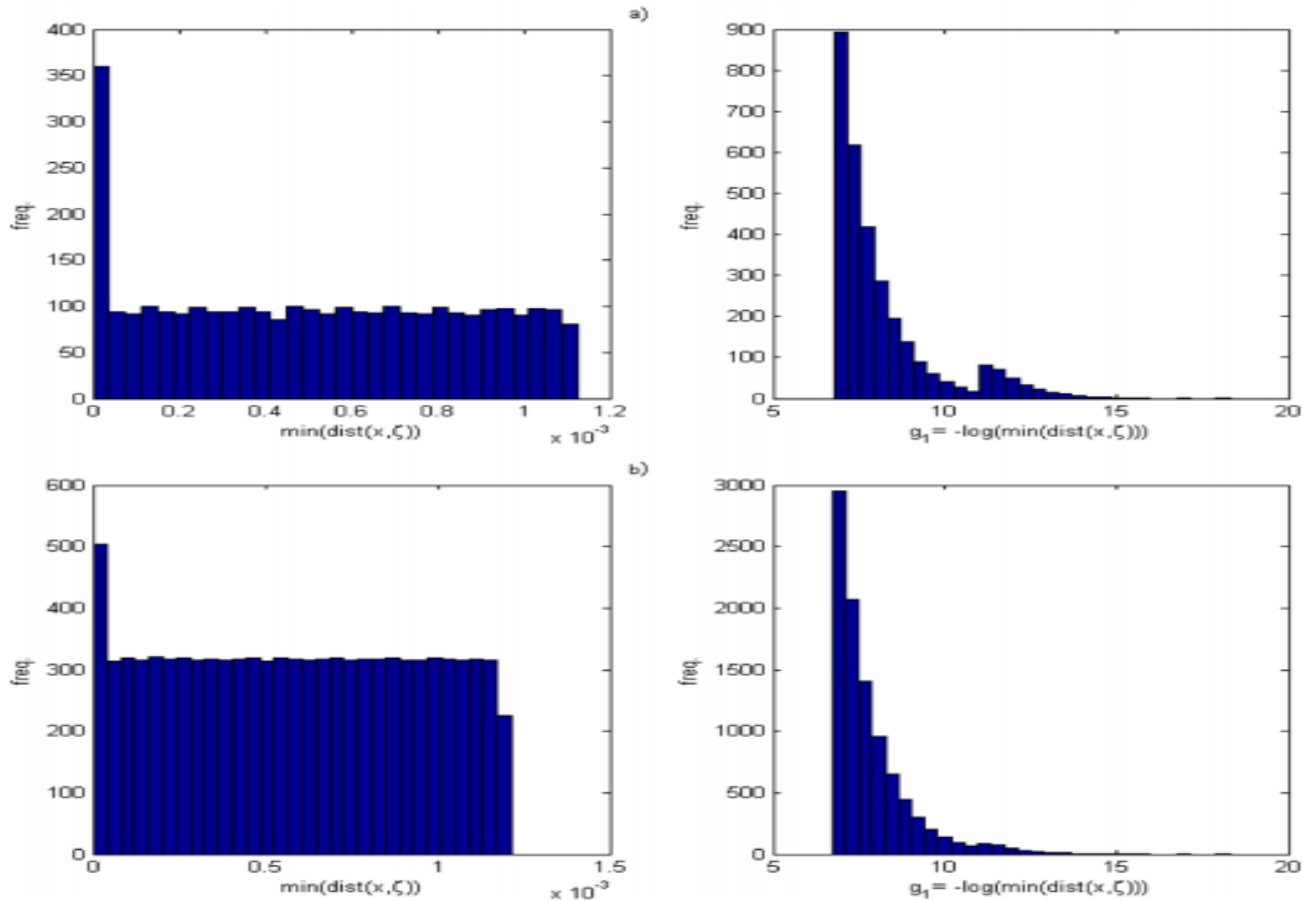
Εάν $k \ll 1$, τότε έχουμε ψευδο-περιοδικές τροχιές. Εστω $k = 10^{-4}$ 

1. Η απεικόνιση έχει **κανονική** συμπεριφορά
2. **Δεν** είναι **αναμεμειγμένη**, οπότε δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες $D2$ & D'
3. **Δεν** έχουν **εκθετική στατιστική χρόνου επιστροφής (Hitting Time)**

Αρα δεν αναμένουμε να πάρουμε μια κατανομή GEV (ΓΚΑΤ), για οποιοδήποτε τύπο

Παρατηρήσιμης συνάρτησης $g_i = g(\text{dist}(f^m(x), \zeta)), i = 1, 2, 3, \forall m \in N$

ΜΕΡΟΣ Α : Μικρή αναφορά της συνεισφοράς Γ. Νίκολη στη ΘΑΤ σε ΧΔΣ



Ιστόγραμμα των maxima για g_1 παρατηρ. Συνάρτησης, Τυπική απεικόνιση, $x_0 = y_0 = \sqrt{2} - 1$
Αριστερά : χρονοσειρά $(\min(\text{dist}(\zeta, \zeta)))$, **Δεξιά :** $g_1 = -\log(\min(\text{dist}(\zeta, \zeta)))$
a) n=3300, m=3300 b) n=10000, m=1000

ΜΕΡΟΣ Β : Εφαρμογές της Κλασικής ΘΑΤ σε χρονοσειρές Χρηματοοικονομικών & Ενεργειακών (Ηλεκτρικών) Αγορών

Φιλτράρισμα δεδομένων SARMA-GARCH για κατάλοιπα που προσομοιάζουν την i.i.d process

Το μοντέλο ARMA είναι ένας συνδυασμός των AR και MA μοντέλων, συμβολίζεται με $ARMA(p, q)$ και ορίζεται ως ακολούθως:

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} - \dots - \varphi_p X_{t-p} = \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} + \vartheta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \vartheta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε μία άλλη χρονοσειρά η οποία γνωρίζουμε ότι **συνδιακυμνεται (covariate)** με τα δεδομένα που αναλύουμε, μπορούμε να βελτιώσουμε τις προβλέψεις μελλοντικών δεδομένων. Η πρόσθεση μίας εξωτερικής (μεταβλητής) εισόδου (input) στο μοντέλο καλείται **εξωγενής (exogenous) μεταβλητή**.

Το μοντέλο ARMA τότε μετατρέπεται σε $ARMAX(p, q, b)$:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \vartheta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^b n_i U_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

όπου b και n_i είναι η **καθυστέρηση (lag)** και ο συντελεστής της **εξωγενούς** μεταβλητής U_{t-i+1} , αντίστοιχα.

ΜΕΡΟΣ Β : Εφαρμογές της Κλασικής ΘΑΤ σε χρονοσειρές Χρηματοοικονομικών & Ενεργειακών (Ηλεκτρικών) Αγορών

Εάν επεξεργαζόμαστε **εποχικά** δεδομένα, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε ένα **εποχικό τελεστή διαφορίσης (seasonal differencing operator)**.

$$X_t - X_{t-s} = (1 - B^s)X_t$$

όπου s είναι η περίοδος των εποχικών δεδομένων.

Για μη αρνητικούς ακεραίους d και D_s , η χρονοσειρά X_t είναι μία **SARIMA(p,d,q)(P,D_s,Q)** διαδικασία με περίοδο s , εάν η διαφορισμένη σειρά $Y_t = (1 - B)^d (1 - B^s)^{D_s} X_t$ είναι μία διαδικασία ARMA, που ορίζεται ως

$$\varphi_p(B)\Phi_P(B^s)Y_t = \vartheta_q(B)\Theta_Q(B^s)\varepsilon_t$$

όπου $\varphi_p(B) = (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p)$

$$\vartheta_q(B) = (1 + \vartheta_1 B + \vartheta_2 B^2 + \dots + \vartheta_q B^q)$$

είναι τα **κανονικά** πολυώνυμα ως προς B , και

$$\Phi_P(B^s) = (1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps})$$

$$\Theta_Q(B^s) = (1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs})$$

είναι τα **εποχικά** πολυώνυμα ως προς B .

p, q είναι οι **κανονικοί** βαθμοί των AR και MA πολυωνύμων, P, Q οι **εποχικοί** βαθμοί των AR και MA πολυωνύμων, d ο αριθμός **κανονικών διαφορίσεων** και D_s ο αριθμός **εποχικών διαφορίσεων**.

Η μοντελοποίηση ARCH/GARCH

Μοντέλα τύπου ARMA χρησιμοποιούνται σε πολλά εφαρμοσμένα προβλήματα. Οι βασικές υποθέσεις των όρων σφάλματος ε_t , συμπεριλαμβάνουν **μηδενική μέση τιμή** και **σταθερή διακύμανση**.

Στην πράξη όμως, η υπόθεση **ομοσκεδιαστικότητας (homoskedasticity)** της σταθερής δηλαδή διακύμανσης, μερικές φορές **δεν ισχύει**. Οι χρονοσειρές αυτές ονομάζονται **ετεροσκεδαστικές (heteroskedastic)**.

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad \text{σε χρόνο } t, t = 1, 2, 3, \dots, N$$

SARMA-GARCH-EVT Μέθοδος υπολογισμού της τιμής σε κίνδυνο (Value at Risk, VaR) στις αποδόσεις τιμών ηλεκτρισμού χονδρικής

Ο συνδυασμός GARCH-EVT ενσωματώνει και τη χρονομεταβαλλόμενη μεταβλητότητα και τις κατανομές αποδόσεων χονδρής ουράς. Η διαδικασία είναι η εξής:

1. Το μοντέλο SARMA-GARCH, με μία κατανομή Student- t_ν (ν βαθμός ελευθερίας), που καθορίζει τη συμπεριφορά του όρου ε_t (βλ. Παράρτημα), εκτιμάται από τις αποδόσεις της τιμής ηλεκτρισμού (π.χ. SMP, SPEL, ELSPOΤ κλπ), μέσω της MLE (μέγιστης πιθανοφάνειας).
2. Τα κατάλοιπα από το SARMA-GARCH μοντέλο **κανονικοποιούνται** και έστω ότι συμβολίζονται με \hat{z}_t .
3. Η ΘΑΤ (EVT-Extreme Value Theory), εφαρμόζεται στα κατάλοιπα \hat{z}_t , ώστε να μοντελοποιήσουμε το **ποσοστημόριο ουράς (tail quantile)** της $F^{-1}(q)$ όπου $F^{-1}(q)$ είναι το q % ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής σε μία **α % ουρά** (δηλ. $q=1-\alpha$). Το ποσοστημόριο ουράς χρησιμοποιείται στην εκτίμηση της **τιμής σε ρίσκο (Value at Risk, VaR)**.

Για την εφαρμογή της ΘΑΤ, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο **POT (Peak Over Threshold)** (McNeil and Frey, 2000, Embrechts et al., 1997).

Μέτρα Κινδύνου (Ρίσκου) κα η Αξία-σε-Κίνδυνο (VaR)

1^{ος} τρόπος ορισμού VaR:

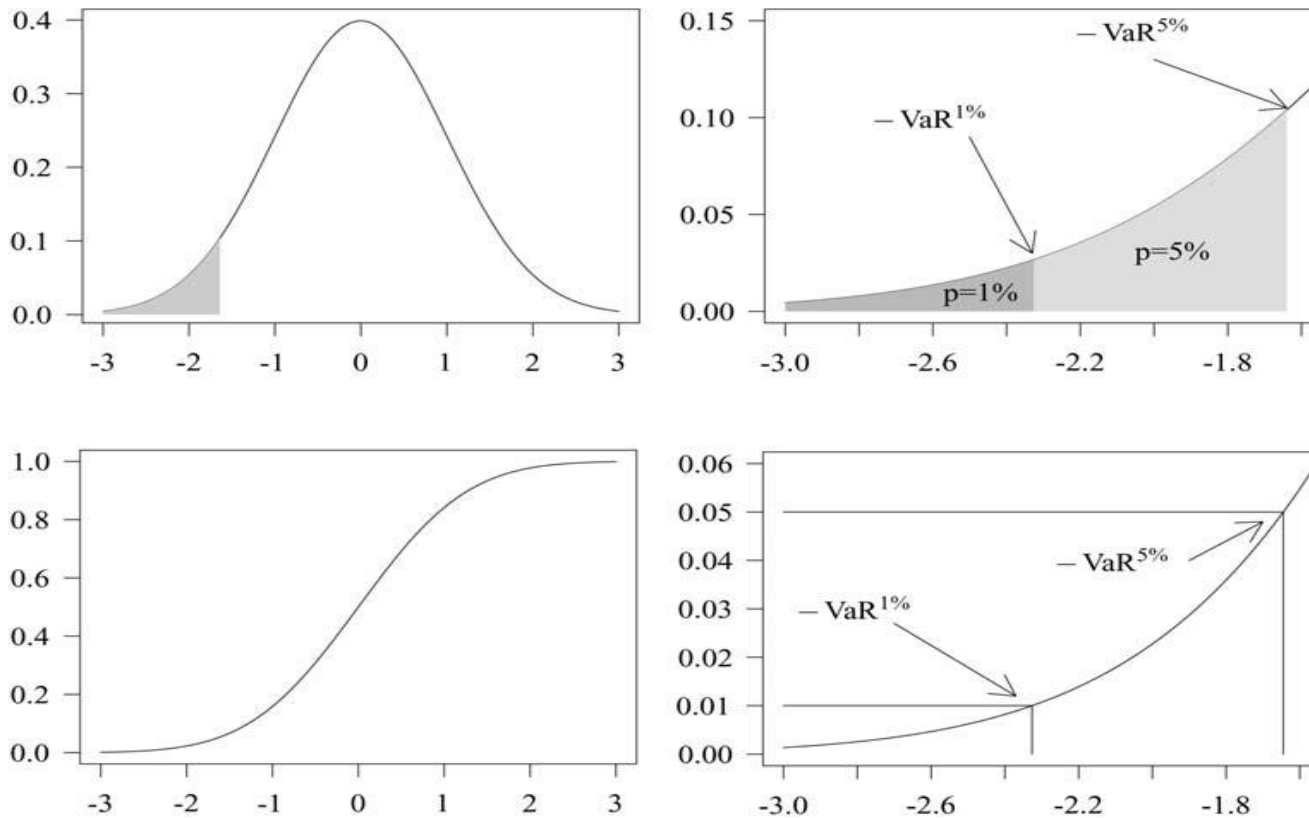
Η απώλεια (ζημία) σε ένα διαπραγματεύσιμο χαρτοφυλάκιο τέτοια ώστε υπάρχει μία πιθανότητα p οι απώλειες να ισούνται ή υπερβαίνουν τη VaR σε δεδομένη περίοδο διαπραγμάτευσης (trading period) και μία πιθανότητα $(1-p)$ οι απώλειες να είναι μικρότερες από τη VaR.

2^{ος} τρόπος ορισμού VaR:

Η Αξία-σε-Κίνδυνο (VaR) ως μέτρο χρησιμοποιείται όταν ένας διαχειριστής χαρτοφυλακίου επιθυμεί να προβεί στην ακόλουθη διατύπωση:
Είναι $\alpha\%$ σίγουρο ότι η ζημία (απώλεια) του χαρτοφυλακίου δεν θα είναι περισσότερη από VaR δολάρια ή Ευρώ, τις επόμενες N ημέρες. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε επίπεδο εμπιστοσύνης α , η VaR του χαρτοφυλακίου δίνεται από το μικρότερο αριθμό I τέτοιον ώστε η πιθανότητα η απώλεια L να υπερβαίνει το I να μην είναι μεγαλύτερη από $(1-\alpha)$.

Μπορούμε να την εκφράσουμε ως $VaR(p)$, π.χ. $VaR(0.05)$. Τα πλέον χρησιμοποιούμενα επίπεδα πιθανότητας είναι 1% και 5%. Η VaR είναι ένα ποσοστημόριο (quantile) πάνω στην κατανομή κέρδους/ζημίας (Profit/Loss, P/L).

Μέτρα Κινδύνου (Ρίσκου) κα η Αξία-σε-Κίνδυνο (VaR)



Σχήμα : Αξία-σε-Κίνδυνο (Value-at-Risk, VaR). Τρόποι ορισμού της.

Το Σχήμα δείχνει πώς ορίζεται η VaR. Η **πάνω αριστερά** εικόνα δείχνει ολόκληρη την πυκνότητα του P/L ενώ η **άνω δεξιά** είναι μεγέθυνση της **αριστερής ουράς (left tail)**, όπου η γραμμοσκιασμένες περιοχές αντιστοιχούν σε 1% και 5% πιθανότητες (η περιοχή από $-\infty$ έως $-VaR$ ισούται προς 0.01 και 0.05 αντίστοιχα). Η **κάτω αριστερά** δείχνει ολόκληρη την κατανομή του P/L ενώ η **κάτω δεξιά** το αριστερό μέρος της κατανομής.

Ο εν λόγω εκτιμητής μπορεί να αντιστραφεί, με σκοπό τον υπολογισμό της VaR

$$F_Z^{-1}(q) = u + \frac{\sigma}{\xi} \left[\left(\frac{N}{N_y} a \right)^\xi - 1 \right]$$

Η εξίσωση (Z), μαζί με την εξίσωση δεσμευμένης μέσης τιμής SARMA και την εξίσωση δεσμευμένης διακύμανσης GARCH, ονομάζεται SARMA-GARCH-EVT.

Για την υλοποίηση του POT θα πρέπει να επιλεχθεί ένα λογικό κατώφλι T. Ιδανικά, το T πρέπει να τεθεί επαρκώς υψηλό έτσι ώστε η μέθοδος POT, μία ασυμπτωτική μέθοδος, να μπορεί να εφαρμοσθεί. Εάν όμως το T είναι πολύ υψηλό, θα υπάρχουν πολύ λίγες υπερβάσεις από τις οποίες θα εκτιμηθούν οι παράμετροι της GPD. Για το σκοπό αυτό ακολουθούμε τις πλέον διαδεδομένες μεθόδους προσδιορισμού του T: τη **συνάρτηση μέσης υπέρβασης (Mean Excess Function, MEF)** και τα **διαγράμματα Hill** (Hill, 1975).

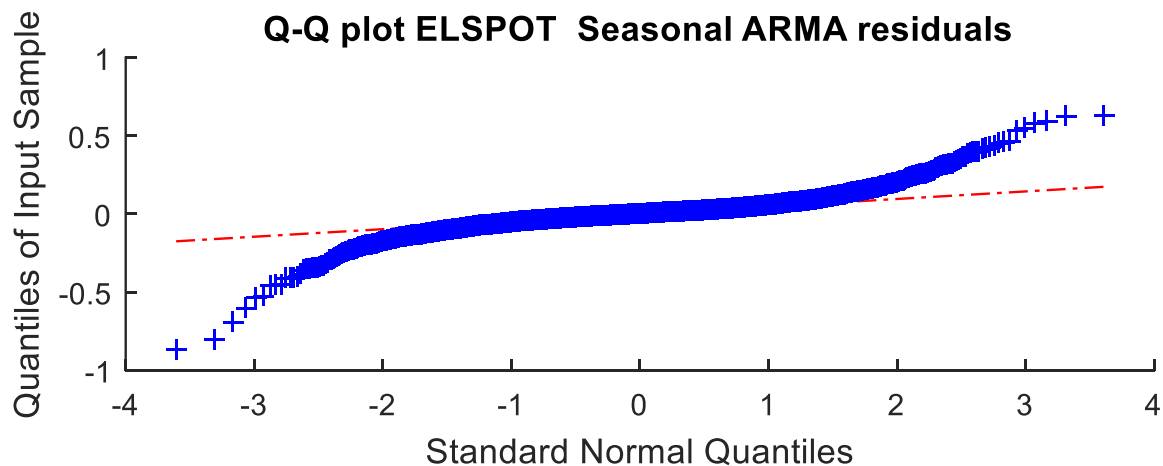
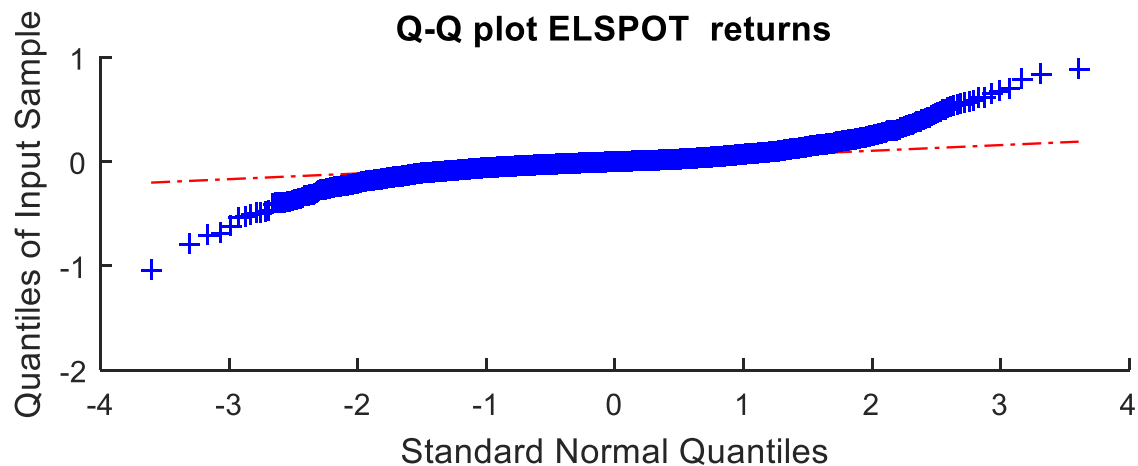
ΜΕΡΟΣ Β : Εφαρμογές της Κλασικής ΘΑΤ σε χρονοσειρές Χρηματοοικονομικών & Ενεργειακών (Ηλεκτρικών) Αγορών

SARMA-GARCH Model for ELSPOT returns

Μοντέλο για τον υπολογισμό των καταλοιπων (residuals) . Οι αρχικές αποδόσεις Εισάγονται στο σύνθετο μοντέλο Conditional Mean (SARMA) & Conditional variance (GARCH(1,1)).

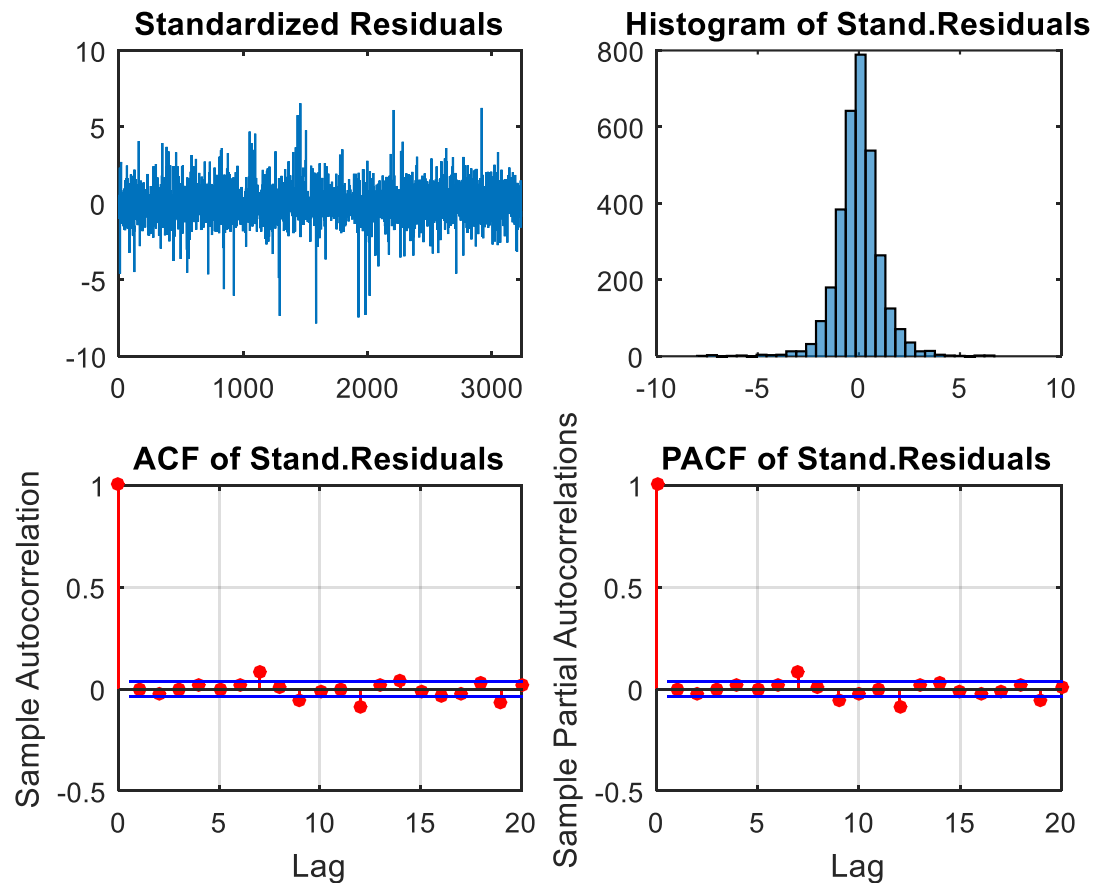
ARIMA(7,0,7) Model Seasonally Integrated with Seasonal AR(7) and MA(7):				GARCH(1,1) Conditional Variance Model:			
-----				-----			
Conditional Probability Distribution: t				Conditional Probability Distribution: t			
		Standard	t				
Parameter	Value	Error	Statistic	Parameter	Value	Error	Statistic
-----				-----			
Constant	-1.44825e-05	6.91094e-06	-2.09559	Constant	0.000144391	2.11046e-05	6.84168
AR{1}	-0.0850746	0.0235486	-3.61273	GARCH{1}	0.736885	0.0147234	50.0485
AR{2}	-0.130349	0.0115165	-11.3184	ARCH{1}	0.254299	0.0185075	13.7403
AR{3}	-0.0787833	0.0107996	-7.29503	DoF	8	Fixed	Fixed
AR{4}	-0.0154783	0.0198322	-0.780463	Offset	0.000755915	0.000821746	0.919889
AR{5}	-0.0691843	0.0102968	-6.71902				
AR{6}	0.114707	0.018569	6.17733				
AR{7}	-0.105908	0.0184701	-5.73402				
SAR{7}	0.718649	0.00671718	106.987				
MA{1}	0.0402903	0.0208716	1.93039				
MA{4}	-0.066213	0.0183	-3.61819				
MA{6}	-0.128356	0.017401	-7.37636				
MA{7}	-0.397731	0.0182412	-21.804				
SMA{7}	-0.986434	0.00123297	-800.047				
Variance	0.0439399	0.0542286	0.810272				
DoF	2.08197	0.108093	19.261				

SARMA-GARCH Model for ELSPOT returns



ΜΕΡΟΣ Β : Εφαρμογές της Κλασικής ΘΑΤ σε χρονοσειρές Χρηματοοικονομικών & Ενεργειακών (Ηλεκτρικών) Αγορών

Κατάλοιπα (residuals) ως αποτέλεσμα φιλτραρίσματος των αρχικών αποδόσεων της τιμής Ηλεκτρισμού ELSPOΤ, της αγοράς Nord Pool, με το σύνθετο μοντέλο SARMA-GARCH



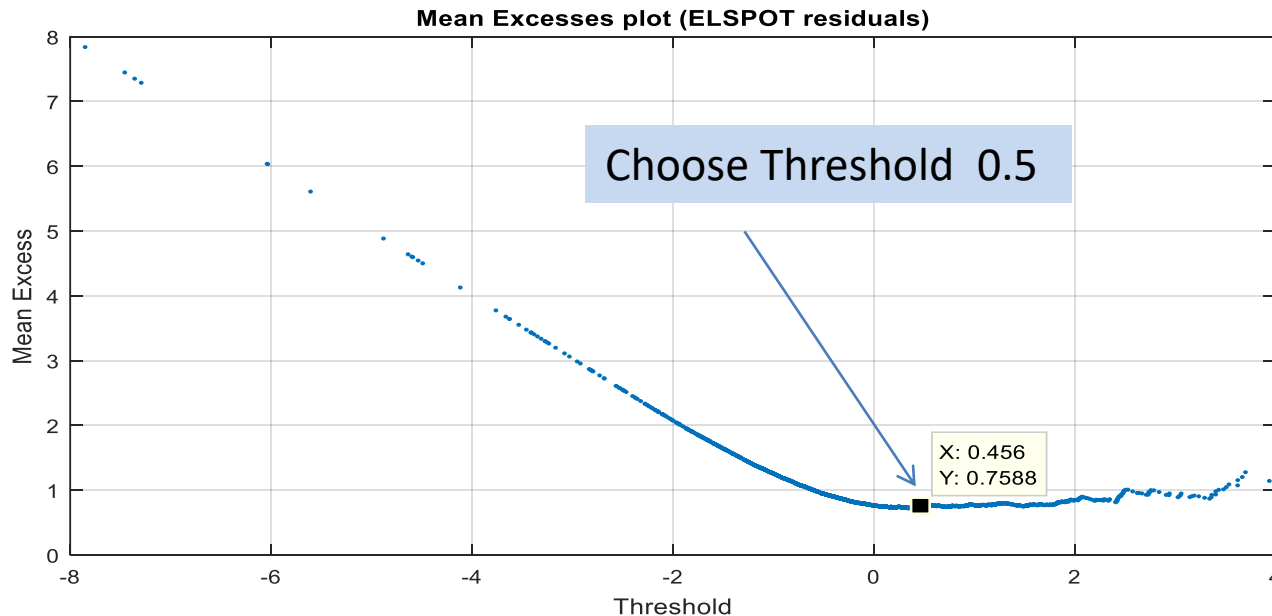
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΗΣ ΥΠΕΡΒΑΣΗΣ -MEAN EXCESS FUNCTION (MEF)

Για τον προσδιορισμό του βέλτιστου Κατωφλίου (Threshold u)

$$MEF = e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}}$$

u = κατωφλι, I = Συναρτ. Δείκτη Αθροισής

Η MFE εκτιμά την αναμενόμενη υπέρβαση πάνω από το βέλτιστο κατωφλι. Εάν έχει μια **Θετική κλίση**, είναι ένδειξη ότι τα δεδομένα ακολουθούν την **Γενικευμένη Κατανομή PARETO**, με $\xi > 0$. Εάν η κλίση της είναι **οριζόντια**, τότε η κατανομή είναι **Εκθετική** ($\xi = 0$), ενώ εάν είναι **αρνητική**, η κατανομή είναι **λεπτής ουράς** ($\xi < 0$)

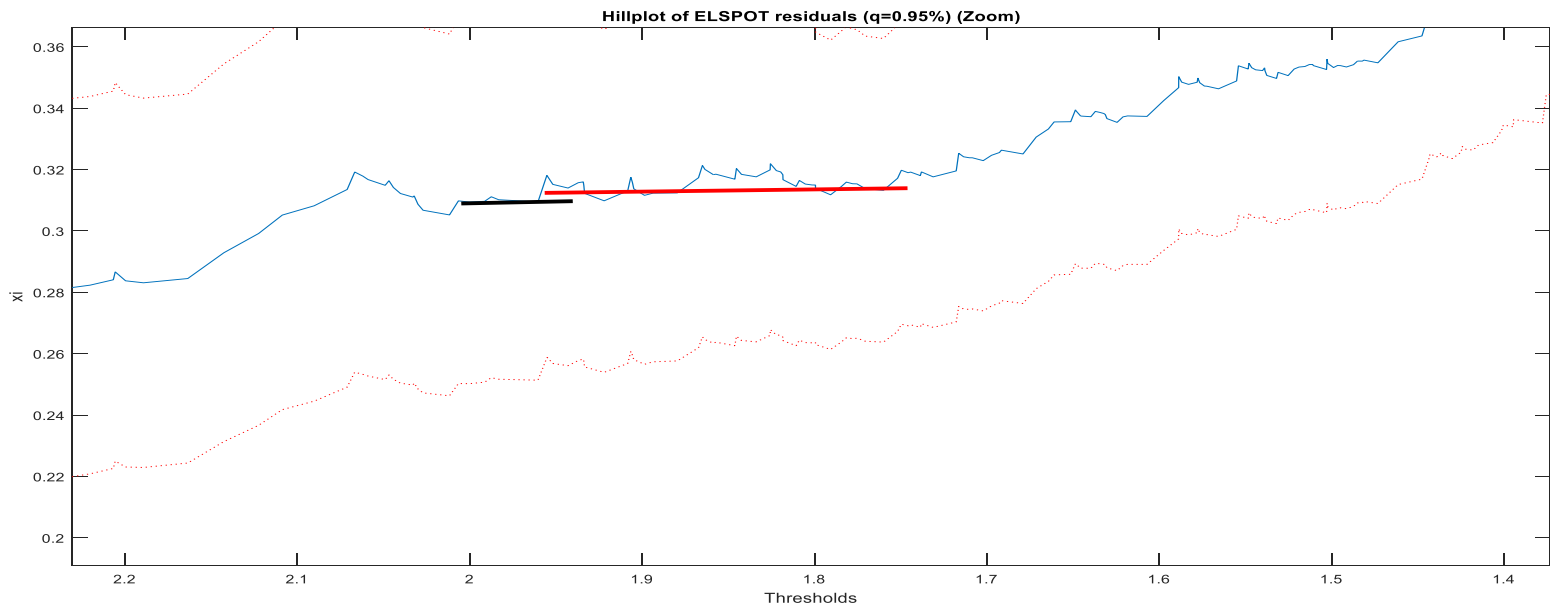


Διάγραμμα Hill (Hill-plot) Προσδιορισμού του βέλτιστου κατωφλίου u (Hill, 1975)

$$\hat{\xi} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \ln X_{i,N} - \ln X_{i,N}, \quad k \geq 2$$

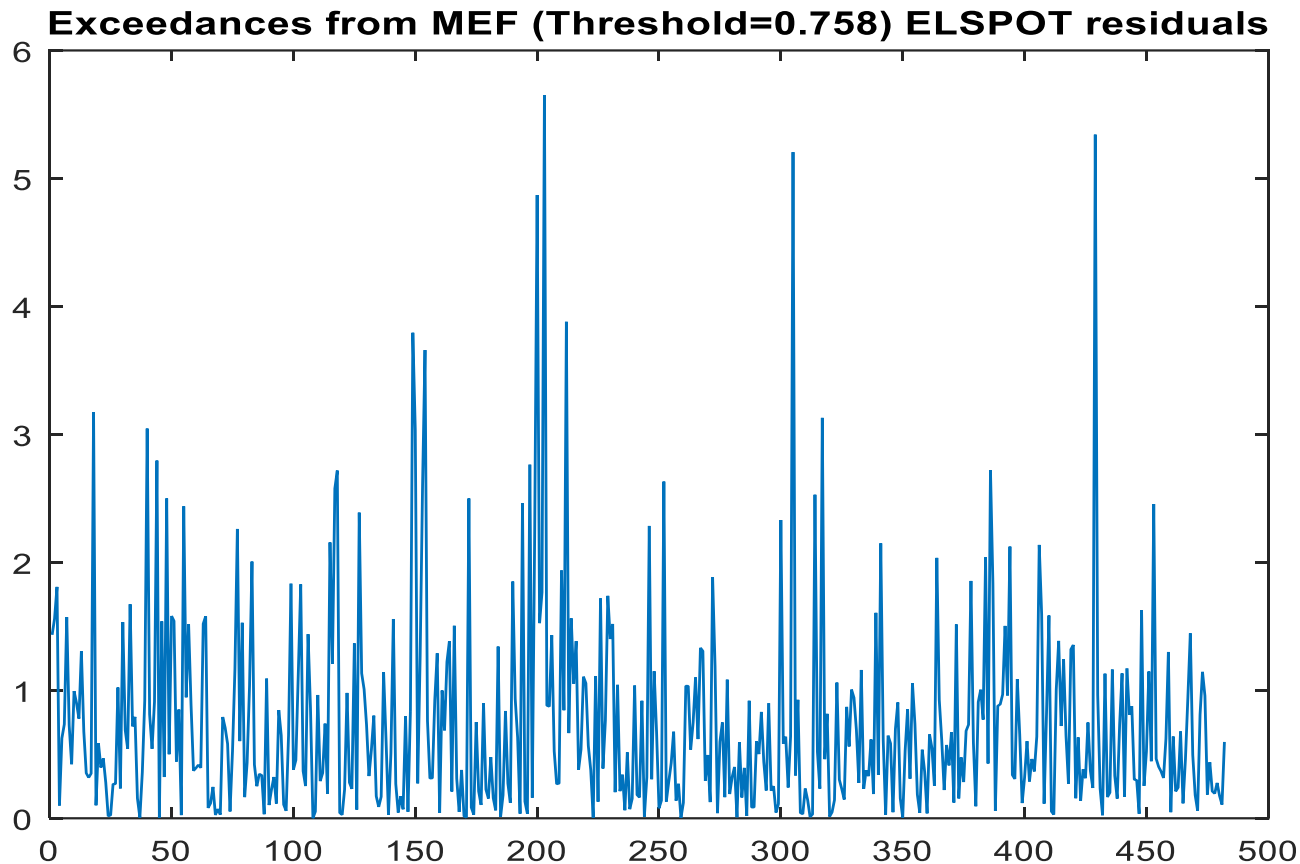
$\hat{\xi}$ = παράμετρος μορφής (shape parameter) , k = upper-order statistics (ο αριθμός των υπερβάσεων > κατωφλι), N = μέγεθος δείγματος.

Ο δείκτης $\hat{\xi}$ σχεδιάζεται ως προς k ή u και επιλέγεται εκείνο το κατωφλι όπου η παράμετρος Μορφής παραμένει επαρκώς σταθερή

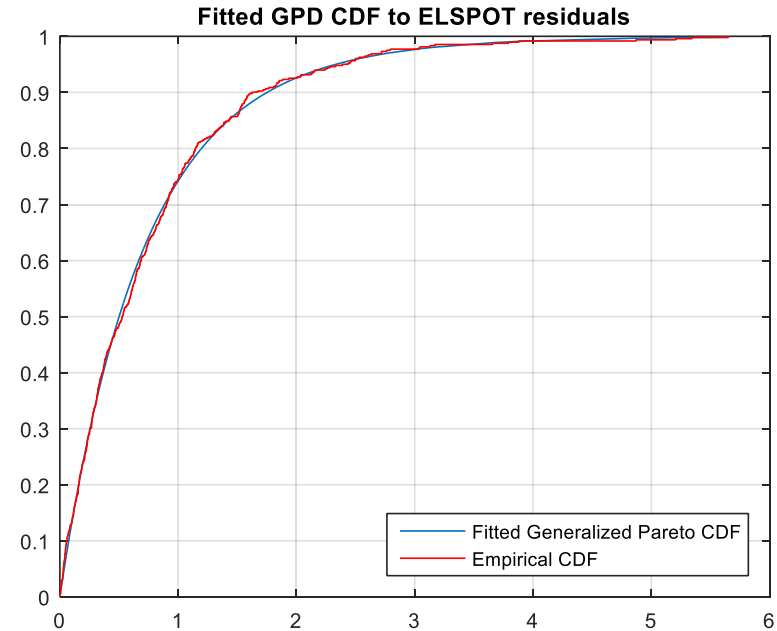
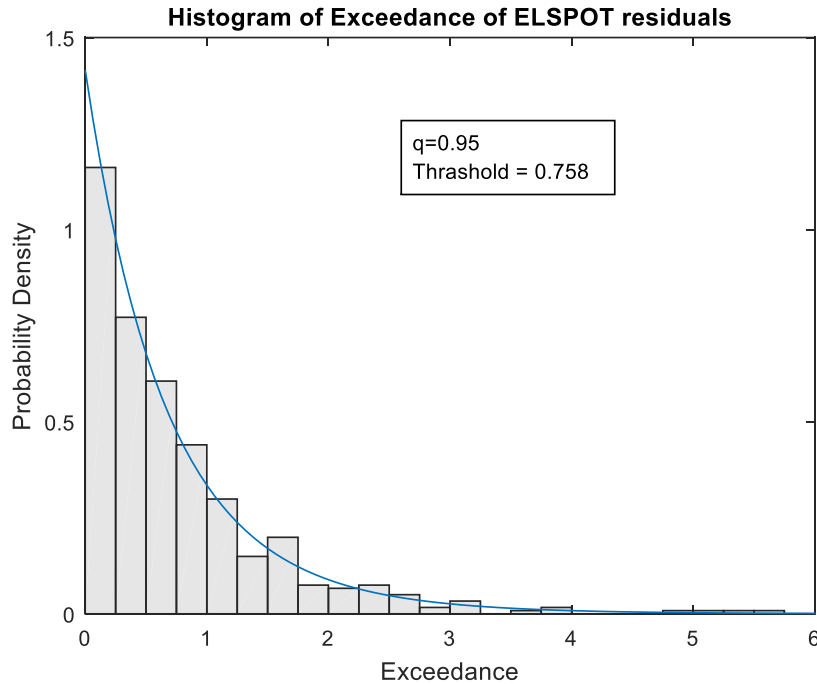


ΜΕΡΟΣ Β : Εφαρμογές της Κλασικής ΘΑΤ σε χρονοσειρές Χρηματοοικονομικών & Ενεργειακών (Ηλεκτρικών) Αγορών

Excedances = 482, % of total length =14,8 % > 10% (McNeil et al, 2005)



ΜΕΡΟΣ Β : Εφαρμογές της Κλασικής ΘΑΤ σε χρονοσειρές Χρηματοοικονομικών & Ενεργειακών (Ηλεκτρικών) Αγορών



GPD parameters

$\xi = 0.064$ Παράμετρος Μορφής
 $\sigma = 0.696$ " " Κλίμακας

ΜΕΡΟΣ Β : Εφαρμογές της Κλασικής ΘΑΤ σε χρονοσειρές Χρηματοοικονομικών & Ενεργειακών (Ηλεκτρικών) Αγορών

Probability	Threshold, u (Quantile)	N_u	N_u/T %	ξ	σ	VaR
ELSPOT (Nord Pool Electricity Market)						
0.90	1.183	323	9.98	0.054	0.730	1.182
0.95	1.728	162	5	0.150	0.654	1.729
0.98	1.859	129	3.98	0.106	0.723	1.857
0.99	2.418	65	2	0.20	0.674	2.421
PUN (Italian Electricity Market)						
0.90	1.154	329	10	0.070	0.544	1.155
0.95	1.539	164	5	0.035	0.609	1.538
0.98	2.080	66	2	-0.0021	0.678	3.083
0.99	2.571	33	1	0.164	0.529	2.573
SPEL(Spanish Electricity Market)						
0.90	1.105	401	10	-0.033	0.513	1.106
0.95	1.493	200	5	0.052	0.412	1.493
0.98	1.894	80	2	0.046	0.427	1.893
0.99	2.204	40	1	0.296	0.291	2.203
SMP(Greek Electricity Market)						
0.90	1.179	329	10	0.060	0.491	1.180
0.95	1.546	164	5	0.105	0.469	1.545
0.98	1.959	66	2	0.090	0.553	1.961
0.99	0.234	33	1	0.296	0.456	2.347

Ακραίες Τιμές Ηλεκτρικής Ενέργειας (χοντρικής) στη Δανία

Στο σύστημα της Δανίας, υπάρχουν δύο περιοχές της αγοράς, γνωστές ως DK1 (Δυτική) και DK2 (Ανατολή), συνδεδεμένες με μια γραμμή μεταφοράς ισχύος 600 MW. Στο παρακάτω σχήμα, απεικονίζεται η τιμή εκκαθάρισης και για τις δύο αγορές. Στη DK2 η τιμή κυμαίνεται από 0 έως 36 € / MWh, ενώ στην DK1 φθάνει σε ορισμένα σημεία τα 1000 € / MWh (παρόλο που οι τιμές που απεικονίζονται στην περιοχή κυμαίνονται στα 150 € / MWh για επεξηγηματικούς σκοπούς). Αυτό οφείλεται στη συμφόρηση της γραμμής μεταφοράς (line congestion) και στην επακόλουθη απόρριψη φορτίου (load shedding), καθώς η τοπική παραγωγή ενέργειας στη περιοχή DK1 δεν καλύπτει τη ζήτηση. Σε αυτές τις περιπτώσεις η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας καθορίζεται από την αξία του απορριφθέντος φορτίου, Έχει εκτιμηθεί ότι η αξία του χαμένου φορτίου είναι 1000 € / MWh και ο σκοπός αυτής της υψηλής τιμής είναι διπλός. Αφενός, λειτουργεί ως μέτρο για την επιβολή κυρώσεων στους καταναλωτές για την υπερβολική τους ζήτηση και, αφετέρου, αποτελεί κίνητρο για επενδύσεις για την αύξηση της παραγωγής, δεδομένου ότι το περιθώριο κέρδους είναι μεγάλο .